# 离散数学 (2) 期末复习

水至月生

2026 年 6 月 1 日

## 前言

计算机的离散 2 这门课程的复习其实是有些困难的。课程涉及到的知识点很碎，考试题目也不是很简单，有股考察注意力的美，我不少打 oi 的朋友都翻车了。如果之前没学过 oi 的话，算法的部分也比较难理解记忆（非算法难，而是课本实在是过于防自学）

基于上面的想法于是产生了这份复习文档，希望它能多用几年。

本篇复习文档将整理基础知识点，算法，以及一些做题的技巧，争取让你的离散 2 复习看这一篇文档就够了。

但是碍于篇幅，自然会缩减一些内容，比如一些过于基础的概念，比如什么是自环，重边这些。不过我相信你既然学了一个学期，这些肯定是会的

算法部分，部分算法文字描述实在是不太好懂，所以如果不能很快看懂我的描述/课本描述的话可以去网上查找一些视频，我也会在每个算法处附一些视频图文资料。如果实在不理解的话欢迎直接来问我。

需要的话可以上小班辅导系统找我约小班辅导/来答疑坊线下找我 (wx：zz777790).

如果对你有帮助的话请说谢谢水至月生。

## 一. 基础知识

### 1. 图的概念

这一节内容不是很多，主要是掌握一些最基础的概念，基本不大可能直接考察这章内容。但基础概念实在是太多了，所以我这里没给出来。需要掌握的概念有这些，如果有不懂的直接看书/问 ai：

有向图，无向图，后继，支撑子图，导出子图，邻接矩阵，权矩阵，关联矩阵

#### 1.1.1 性质

设 $G = (V, E)$ 有 $n$ 个顶点，$m$ 条边，则

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

## 2. 道路与回路

### 2.1. 图的连通性

前两个定理知道即可，考出来概率不大。对于后面割边隔点的定义，主要会和树的内容夹杂在一定考察，要熟悉

**定理 2.1.1**

设 $C$ 是简单图 $G$ 中含顶点数大于 3 的一个初级回路，如果顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 在 $C$ 中不相邻，而边 $(v_i, v_j) \in E(G)$，则称 $(v_i, v_j)$ 是 $C$ 的一条弦。若对每一个 $v_k \in V(G)$，都有 $d(v_k) \geq 3$，则 $G$ 中必含带弦的回路。

**定理 2.1.2**

设 $G$ 是简单图，$n$ 表示顶点数，$m$ 表示边数，证明当 $m > \dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，$G$ 是连通图。

**定理 2.1.3**

设 $v$ 是连通图 $G$ 的一个顶点，则下述性质等价。

1. $v$ 是 $G$ 的一个割点。
2. 存在与 $v$ 不同的两个顶点 $u$ 和 $w$，使任一条 $u$ 到 $w$ 的道路 $P_{uw}$ 都经过 $v$。
3. $V - v$ 可以划分为两个顶点集 $U$ 和 $W$，使对任意顶点 $u \in U$ 和 $w \in W$，顶点 $v$ 都在每一条道路 $P_{uw}$ 上。

**定理 2.1.4**

令 $e$ 是连通图 $G$ 的一条边，下述性质是等价的。

1. $e$ 是 $G$ 的一条割边。
2. $e$ 不属于 $G$ 的任何回路。
3. 存在 $G$ 的顶点 $u$ 和 $w$，使 $e$ 属于 $u$ 和 $w$ 的任何一条道路 $P_{uw}$。
4. $G - e$ 可以划分为两个顶点集 $U$ 和 $W$，使得对任何顶点 $u \in U$ 和 $w \in W$，在 $G$ 中道路 $P_{uw}$ 都经过 $e$。

### 2.2. 欧拉道路和回路

掌握定理 2.2.2 和 2.2.3 即可

**定义 2.2.1**

无向连通图 $G = (V, E)$ 中的一条经过所有边的简单回路（道路）称为 $G$ 的欧拉回路（道路）。

**定理 2.2.2**

无向连通图 $G$ 存在欧拉回路的充要条件是 $G$ 中各结点的度都是偶数。

**推论 2.2.3**

若无向连通图 $G$ 中只有 2 个度为奇数的结点，则 $G$ 存在欧拉道路。

### 2.3. 哈密顿道路和回路

这一节同样，核心是定理 2.3.1，这一节的证明过程很经典，如果有所余力的话可以看一看定理 2.4.1 和引理 2.4.5 的证明。

**定义 2.3.1** 无向图 $G$ 的一条过全部结点的初级回路（道路）称为 $G$ 的哈密顿回路（道路），简记为 $H$ 回路（道路）。

**定理 2.3.2**

如果简单图 $G$ 中任意两结点 $v_i, v_j$ 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$，则 $G$ 中存在哈密顿道路。

**引理 2.3.3**

若简单图 $G$ 中存在 $H$ 道路，但不存在 $H$ 回路，不妨设其 $H$ 道路的两端点为 $v_1$ 和 $v_n$，则

$$d(v_1)+d(v_n) \leq n-1.$$

**推论 2.3.4**

若简单图 $G$ 的任意两结点 $v_i, v_j$ 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$，则 $G$ 中存在哈密顿回路。

**定义 2.3.5**

若 $v_i$ 和 $v_j$ 是简单图 $G$ 的不相邻结点，且满足 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$，则令 $G' = G+(v_i, v_j)$，对 $G'$ 重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止。最终得到的图称为 $G$ 的闭合图，记做 $C(G)$。

**引理 2.3.6**

简单图 $G$ 的闭合图 $C(G)$ 是唯一的。

**定理 2.3.7**

简单图 $G$ 存在哈密顿回路的充要条件是其闭合图存在哈密顿回路。

**推论 2.3.8**

设 $G(n \geq 3)$ 为简单图，若 $C(G)$ 为完全图，则 $G$ 有 $H$ 回路。

### 2.4. 旅行商问题

注：多半不考，可以不看；如果考出来多半是让手算一个题。

这类问题会给出一个完全图，之后我们要寻找一个最短的哈密顿回路

这里给出书上的算法：

(1) 将所有的边按照边权的大小从小到大排序

(2) 选取最短的 n 条边, 后续我们将按长短，将选取的边从短到长称为第 $1, 2, \cdots, n$ 条边

(3) 观察是否能组成回路, 可以的话对比当前最小值, 若更小则记录，进入 (4);

不可以的话取选取的第 n 条边，将其换为其排序中的下一条边，进入 (3);

如果选取的第 n 条边没有下一条边，则进入 (4)

(4) 将第 $n-i$ 条边后移一位, 在其后的选取边都取最小, 如果此时操作无法进行, $i=i+1$, 重复 (4)

若操作可以进行，计算当前大小，若大于最小值则结束，

若小于则进入 (3)

### 2.5. 最短路径问题

#### 2.5.1：Dijkstra 算法

一句话记忆：每次从未确定最短路径的顶点中，选择距离起点最近的顶点，将其标记为「已确定最短路径」；

在选取中，每次新选取的顶点，一定是和已确定最短路径的顶点直接相连的

视频可以看看这个：B 站-【算法】最短路径查找—Dijkstra 算法

### 2.6. 关键路径

这一节如果考出来就是让画一个 PT 图之后求关键路径了。

#### 2.6.1：PT 图

将工序看作顶点，几个工序就是几个顶点，边表示限制关系

#### 2.6.2：关键路径

在 PT 图中，重新对顶点编号，使得边肯定从小到大。之后按照编号，从小到大求最大时间。

## 3. 树

### 3.1. 树

本节要熟悉树的定义和性质。

**定义 3.1.1**

一个不含任何回路的连通图称为**树**，用 $T$ 表示。$T$ 中的边称为**树枝**，度为 1 的结点称为**树叶**。

**定理 3.1.2**

设 $T$ 是结点数为 $n \geq 2$ 的树，则下列性质等价：

1. $T$ 连通且无回路
2. $T$ 连通且每条边都是割边
3. $T$ 连通且有 $n-1$ 条边
4. $T$ 有 $n-1$ 条边且无回路
5. $T$ 的任意两结点间有唯一道路
6. $T$ 无回路，但在任意两结点间加上一条边后恰有一个回路

**定义 3.1.3**

如果 $T$ 是图 $G$ 的支撑子图，而且又是一棵树，则称 $T$ 是 $G$ 的一棵**支撑树**，或称**生成树**，又简称为 $G$ 的树。

### 3.2. 基本关联矩阵

接下来几节的内容都和线代紧密相关，线代学不好的小朋友们有福了。

这一节的内容主要为环对应的列线性相关，如果的线代还不错的话，可以多用线代观点理解辅助记忆

**定义 3.2.1**

设有向图 $D=(V,E)$，顶点集 $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，边集 $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，构造 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{顶点}v_i\text{ 是边}e_j\text{ 的起点},\\ -1, & \text{顶点}v_i\text{ 是边}e_j\text{ 的终点},\\ 0, & \text{顶点}v_i\text{ 与边}e_j\text{ 不关联}.\end{cases}$$

称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为有向图 $D$ 的关联矩阵。

**定义 3.2.2**

在有向连通图 $G=(V,E)$ 的关联矩阵中划去任意结点 $v_k$ 所对应的行，得到一个 $(n-1)\times m$ 的矩阵 $B_k$，$B_k$ 称为 $G$ 的一个**基本关联矩阵**。

**定理 3.2.3**

有向图 $G=(V,E)$ 关联矩阵 $B$ 的秩

$$\operatorname{rank} B<n.$$

**定理 3.2.4**

设 $B_0$ 是有向图 $G$ 关联矩阵 $B$ 的任一 $k$ 阶子方阵，则 $\det(B_0)$ 为 0、1 或 $-1$。

**定理 3.2.5**

设 $B$ 是有向连通图 $G$ 的关联矩阵，则

$$\operatorname{rank} B=n-1.$$

**定理 3.2.6**

连通图 $G$ 基本关联矩阵 $B_k$ 的秩

$$\operatorname{rank} B_k=n-1.$$

**定理 3.2.7**

设 $B_k$ 为有向连通图 $G$ 的基本关联矩阵，$C$ 为 $G$ 中的一个回路，则 $C$ 中各边所对应 $B_k$ 的各列线性相关。

**定理 3.2.8**

令 $B_k$ 是有向连通图 $G$ 的基本关联矩阵，那么 $B_k$ 的任意 $n-1$ 阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成 $G$ 的一棵支撑树。

### 3.3. 支撑树的计数

这一节计算证明都有可能。这一节的全部结论几乎都是上一节的推论，线代好的话最好还是理解记忆。

**定义 3.3.1**

$T$ 为有向树，若 $T$ 中存在某结点 $v_0$ 的负度为 0，其余结点负度为 1，则称 $T$ 为以 $v_0$ 为根的**外向树**，或称**根树**，用 $\overrightarrow{T}$ 表示。

**定义 3.3.2**

令 $\overrightarrow{B}_k$ 表示有向连通图 $G$ 的基本关联矩阵 $B_k$ 中全部 1 元素改为 0 后的矩阵。

**定理 3.3.3**

设 $B_k$ 是有向连通图 $G=(V,E)$ 的某一基本关联矩阵，则 $G$ 的不同支撑树的数目是

$$\det(B_k B_k^T).$$

**定理 3.3.4**

有向连通图 $G$ 中以 $v_k$ 为根的根树数目是

$$\det(\overrightarrow{B}_k B_k^T).$$

### 3.4 回路矩阵与割集矩阵

这节内容比较恶心，核心主要需要掌握对于不同的矩阵，子式的行列式非 0 代表什么，不同矩阵之间的关系，并记住概念。

如果有余力的话可以看看行列式非 0 对应列是树/余树的证明

**定理 3.4.1**

有向连通图 $G=(V,E)$ 的关联矩阵 $B$ 和完全回路矩阵 $C_e$ 的边次序一致时，恒有：

$$BC_e^T=0.$$

**定理 3.4.2**

有向连通图 $G=(V,E)$ 的完全回路矩阵的秩为 $m-n+1$。

**定义 3.4.3**

有向连通图 $G$ 中 $m-n+1$ 个互相独立的回路组成的矩阵，称为 $G$ 的**回路矩阵**，记为 $C$。

**定理 3.4.4**

连通图 $G=(V,E)$ 的回路矩阵 $C$ 的任一 $m-n+1$ 阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于 $G$ 的某一棵余树。

**定义 3.4.5**

设 $S$ 为有向图 $G=(V,E)$ 的边子集，若

- $G'=(V,E-S)$ 比 $G$ 的连通支数多 1；
- 对任意 $S$ 的真子集 $S'$，$G''=(V,E-S')$ 与 $G$ 的连通支数相同；

则称 $S$ 为 $G$ 的一个**割集**。

**定义 3.4.6**

有向连通图 $G$ 的全部割集构成的矩阵，称为 $G$ 的**完全割集矩阵**，记为 $S_e$，其元素定义为：

$$s_{ij}=\begin{cases}1, & e_j\in S_i \text{ 且与割集} S_i \text{ 方向一致},\\ -1, & e_j\in S_i \text{ 且与割集} S_i \text{ 方向相反},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

**定义 3.4.7**

设 $T$ 是连通图 $G$ 的一棵树，$e_i$ 是树枝。对应 $e_i$ 存在 $G$ 的割集 $S_i$，$S_i$ 只包括一条树枝 $e_i$ 及某些余树枝，且与 $e_i$ 的方向一致，此时称 $S_i$ 为 $G$ 的对应树 $T$ 的一个**基本割集**。

**定义 3.4.8**

给定有向连通图 $G$ 的一棵树 $T$，由对应 $T$ 的全部基本割集组成的矩阵称为**基本割集矩阵**，记为 $S_f$。

**定理 3.4.9**

当有向连通图 $G$ 的完全回路矩阵 $C_e$ 和完全割集矩阵 $S_e$ 的边次序一致时，有:

$$S_e C_e^T = 0.$$

**定理 3.4.10**

有向连通图 $G = (V, E)$ 的完全割集矩阵的秩为 $n - 1$。

### 3.5 支撑树的生成

了解树于树之间的距离

**定义 3.5.1**

设 $t_1$ 和 $t_2$ 是连通图 $G$ 距离为 1 的两棵树，满足 $t_1 - t_2 = (e)$，$t_2 - t_1 = (e')$，则称

$$t_2 = t_1 \oplus (e, e')$$

为 $t_1$ 到 $t_2$ 的**基本树变换**。

**定理 3.5.2**

令 $t_1$ 和 $t_2$ 是 $G$ 中距离为 1 的两棵树，且 $t_1 - t_2 = (e)$，$t_2 - t_1 = (b)$，则 $b \in S_e(t_1)$；反之，若 $b \in S_e(t_1)$，则 $t_2 = t_1 \oplus (e, b)$ 是一棵树。

**定理 3.5.3**

给定 $G$ 的一棵树 $t_0$，令 $t_1, t_2, \ldots, t_p$ 是 $G$ 中全部满足

$$\begin{cases} t_0 - t_i = (e) \\ t_i - t_0 = (b_i) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

的树，则 $S_e(t_0) = (e, b_1, b_2, \ldots, b_p)$。反之，若 $b_i \in S_e(t_0)$，则 $t_i = t_0 \oplus (e, b_i)$ 是一棵树。

**定义 3.5.4**

令

$$T^e = \{t_0 \oplus (e, b) \mid b \in S_e(t_0), b \neq e\}$$

其中 $T^e$ 可表述为：用 $e$ 的基本割集每条边逐一替代 $e$ 后生成的新树集合。这是所有距离原树为 1 的树。

### 3.6.Huffman 树

**定义 3.6.1**

除树叶外，其余结点的正度最多为 2 的外向树称为二**叉树**。

如果它们的正度都是 2，则称为**完全二叉树**。

**3.6.2Huffman 树的构造**

将所有的项从小到大排序，之后构造新项，为最小的两项之和，其左右儿子即为最小的两项，之后将最小的两项删去，并增加该新项，重复上述操作

## 3.7. 最短树

### 3.7.1.Kruskal 算法

按边的权值从小到大依次选边，只要这条边不会形成环，就加入生成树；直到选够顶点数-1 条边，算法结束。

### 3.7.2.Prim 算法

选取初始结点 $v$，构成集合 $U$，其余结点为 $V-U$；选取 $V-U$ 中距离 $U$ 最近的结点 $u$，并入集合 $U$，并将相应的边并入树 $T$；重复上述步骤，直到所有结点都进入 $U$。

### 3.7.3. 破圈法

找到图中的一个简单回路（圈），去掉其中最长的一条边，重复直到没有回路

# 4. 平面图

## 4.1. 平面图

熟悉域等基础概念，对于边，顶点，域的数量关系要熟悉

**定义 4.1.1**

若能把图 $G$ 画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称 $G$ **可嵌入平面**，或称 $G$ 是**可平面图**。可平面图在平面上的一个嵌入称为**平面图**。

**定义 4.1.2**

设 $G$ 是一个平面图，由它的若干条边所构成的一个区域内如果不含任何结点及边，就称该区域为 $G$ 的一个**面**（或**域**）。包围这个域的诸边称为该域的**边界**。把平面图 $G$ 外边的无限区域称为**无限域**，其他区域都叫做**内部域**。如果两个域有共同边界，就说它们是**相邻**的，否则是不相邻的。

**定理 4.1.3（欧拉公式）**

设 $G$ 是平面连通图，则 $G$ 的域的数目 $d$ 满足：

$$d = m - n + 2$$

**推论 4.1.4**

若平面图有 $k$ 个连通支，则：

$$n - m + d = k + 1$$

**推论 4.1.5**

对一般平面图 $G$，恒有：

$$n - m + d \geq 2$$

**定理 4.1.6**

设平面连通图 $G$ 没有割边，且每个域的边界数至少是 $t$，则:

$$m \leq \frac{t(n-2)}{t-2}$$

### 4.2. 极大平面图

**定义 4.2.1**

设 $G$ 是 $n \geq 3$ 的简单平面图，若在任意两个不相邻的结点 $v_i, v_j$ 之间加入边 $(v_i, v_j)$ 就会破坏图的平面性，则称 $G$ 为**极大平面图**。

**极大平面图的性质 4.2.2:**

- $G$ 是连通的;
- $G$ 不存在割边;
- $G$ 的每个域的边界数都是 3;
- $3d = 2m$。

**定理 4.2.3**

极大平面图 $G$ 中，有:

$$m = 3n - 6, \quad d = 2n - 4$$

**推论 4.2.4**

对一般简单平面图 $G$，恒有:

$$m \leq 3n - 6, \quad d \leq 2n - 4$$

**定理 4.2.5**

简单平面图 $G$ 中，存在度小于 6 的结点（反证法证明）。

### 4.3. 非平面图

**定义 4.3.1 二分图（二部图）**

设 $G = (V, E)$ 是简单图，如果可把 $V$ 划分为两个子集 $X, Y$，其中 $X \cup Y = V, X \cap Y = \varnothing$，使得对任意边 $(u, v) \in E$，都有 $u \in X, v \in Y$，则称 $G$ 为**二分图**，也称**二部图**。一般情况下，二分图 $G$ 记为 $G = (X, Y, E)$。

**定义 4.3.2 非平面图**

如果图 $G$ 不能嵌入平面，即无论如何绘制，总有两条边在非结点处相交，则称 $G$ 为**非平面图**。

**定理 4.3.3**

完全图 $K_5$ 是非平面图。

**定理 4.3.4**

完全二分图 $K_{3,3}$ 是非平面图。

**定义: $K^{(1)}$ 图与 $K^{(2)}$ 图**

- $K^{(1)}$ 图: 即 $K_5$ - $K^{(2)}$ 图: 即 $K_{3,3}$

**定义 4.3.5 $K$ 型图**

在 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$ 图上任意增加一些度为 2 的结点之后得到的图，称为 $K^{(1)}$ 型和 $K^{(2)}$ 型图，统称为$K$ **型图**（也称为 $K_5$ 和 $K_{3,3}$ 的“细分图”）。

**定理 4.3.6（库拉托夫斯基定理）**

图 $G$ 是可平面图的充要条件是：$G$ 不存在 $K$ 型子图。

## 4.5. 对偶图

**定义 4.5.1 对偶图**

满足以下条件的图 $G^*$ 称为平面图 $G$ 的**对偶图**：

1. $G$ 中每个确定的面 $f_i$ 内设置一个结点 $v_i^*$。
2. 对 $G$ 中两个面 $f_i$ 和 $f_j$ 的公共边界 $e_k$，在 $G^*$ 中有一条边 $e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$ 与 $e_k$ 相交一次。
3. 若边 $e_k$ 是 $G$ 中某个面 $f_i$ 的环（仅属于一个面），则 $G^*$ 中 $v_i^*$ 有一个自环 $e_k^*$ 与 $e_k$ 相交一次。

**性质 4.5.2**

1. 如果 $G$ 是平面图，则它一定有对偶图 $G^*$，且在平面嵌入下 $G^*$ 是唯一的。
2. 对偶图 $G^*$ 一定是连通图。
3. 若 $G$ 是平面连通图，则其对偶图的对偶图就是自身，即 $(G^*)^* = G$。
4. 平面连通图 $G$ 与其对偶图 $G^*$ 的参数满足以下对应关系：

$$m = m^*, \quad d = n^*, \quad n = d^*$$

其中 $n, m, d$ 分别是 $G$ 的结点数、边数和面数；$n^*, m^*, d^*$ 分别是 $G^*$ 的结点数、边数和面数。

5. 若 $C$ 是平面图 $G$ 的一个初级回路，则 $G^*$ 中与 $C$ 各边对应的边集 $S^*$ 是 $G^*$ 的一个割集。

**定理 4.5.3** 一个图 $G$ 存在对偶图的充要条件是 $G$ 是平面图。

## 4.6. 色数和色数多项式

学会计算色数和色数多项式

**定义 4.6.1 色数**

给定图 $G$，满足相邻结点着以不同颜色的最少颜色数目称为 $G$ 的**色数**，记为 $\gamma(G)$。

**定义 4.6.2 边色数**

给定图 $G$，满足相邻边着以不同颜色的最少颜色数目称为 $G$ 的**边色数**，记为 $\beta(G)$。

**定理 4.6.3**

一个非空图 $G$，$\gamma(G) = 2$ 当且仅当它没有奇回路（即 $G$ 是二分图）。

**定理 4.6.4**

对于任意一个图 $G$，设 $d_0 = \max d(v_i)$（最大结点度），则：

$$\gamma(G) \leq d_0 + 1$$

**定理 4.6.5**

对任意图 $G$，有：

$$\gamma(G) \leq 1 + \max_{G' \subseteq G} \delta(G')$$

其中 $\delta(G')$ 表示 $G$ 的导出子图 $G'$ 中的最小结点度。

**定义 4.6.6 图的两种运算**

设 $v_i, v_j$ 是简单图 $G$ 中不相邻的两个结点：

1. **加边图**：$\overline{G_{ij}} = G + (v_i, v_j)$（在 $G$ 中添加边 $(v_i, v_j)$）。
2. **收缩图**：$\overset{\circ}{G}_{ij}$ 是将 $v_i, v_j$ 合并为新结点 $v_{ij}$，并由 $v_{ij}$ 继承原连接关系的简单图。

**定理 4.6.7（色数的递推公式）**

设 $v_i, v_j$ 是简单图 $G$ 中不相邻的两个结点，则：

$$\gamma(G) = \min\left\{\gamma\left(\overline{G_{ij}}\right), \gamma\left(\overset{\circ}{G}_{ij}\right)\right\}$$

**定义 4.6.8 色数多项式**

对于简单图 $G$，给定 $t$ 种颜色对 $G$ 的结点进行着色，满足相邻结点着以不同颜色的着色方案数可用 $f(G,t)$ 表示，称为 $G$ 的**色数多项式**。

**定理 4.6.9（色数多项式的递推公式）**

设 $i, j$ 是 $G$ 的不相邻结点，则：

$$f(G,t) = f\left(\overline{G_{ij}}, t\right) + f\left(\overset{\circ}{G}_{ij}, t\right)$$

## 5. 匹配与网络流

至少在 2026 年，崔老师不讲这一章，崔老师课堂的可以跳过

### 5.1. 二分图的最大匹配

这节主要是掌握匈牙利算法

**定义 5.1.1 匹配、饱和点、不饱和点**

设 $M$ 为图 $G$ 的边子集，若 $M$ 中任意两条边都没有公共的结点，则称 $M$ 是 $G$ 的一个**匹配**；其中与 $M$ 的边关联的结点称为**饱和点**，否则称为**不饱和点**。

**定义 5.1.2 最大匹配**

设 $M$ 是 $G = (V, E)$ 中的一个匹配，如果对 $G$ 的任意匹配 $M'$，都有 $|M| \geq |M'|$，就说 $M$ 是 $G$ 的一个**最大匹配**。

**定义 5.1.3 交互道路（交错路）**

给定 $G$ 的一个匹配 $M$，$G$ 中属于 $M$ 与不属于 $M$ 的边交替出现的道路称为**交互道路（交错路）**。

**定义 5.1.4 可增广道路（增广路）**

设 $P$ 是 $G$ 中关于匹配 $M$ 的一条交互道路，如果 $P$ 的两个端点是关于 $M$ 的非饱和点，那么 $P$ 就称为**可增广道路（增广路）**。

**定理 5.1.1（贝尔热定理）**

$M$ 是 $G$ 的最大匹配当且仅当 $G$ 中不存在关于 $M$ 的可增广道路。

**定理 5.1.5 匈牙利算法**

实在是找不到很简单的描述法了，这里贴一个视频：b 站的：3 分钟彻底搞懂二分图匹配！匈牙利算法动画演示

或者你可以理解为，匈牙利算法就是在不断的“抢夺”/匹配。对于没有匹配的左节点 A，其能否被加进去最大匹配，就看其能否抢夺/匹配右节点。如果这个左节点 A 连接的右节点，存在没被匹配的，显然就可以匹配成功。

如果都被匹配了，就轮着尝试抢夺。对于节点 B，设其匹配的是 C，那么 A 能抢夺成功，就取决于 C 能否抢夺/匹配一个不是 B 的节点。

说成绕口令就是：我能不能抢夺成功，取决于被我抢夺的人能不能匹配成功或抢夺成功，也就是取决于被我抢夺的人能不能匹配成功或被被我抢夺的人抢夺的人能不能匹配成功或抢夺成功，也就是取决于被我抢夺的人能不能匹配成功或被被我抢夺的人抢夺的人能不能匹配成功或被被被我抢夺的人抢夺的人抢夺的人能不能匹配成功或抢夺成功⋯⋯

## 5.2. 完全匹配

**定理 5.2.1（Hall 婚配定理）**

二分图 $G=(X,Y,E)$ 存在 $X\to Y$ 的完全匹配 $\iff$ $\forall A\subseteq X$，$|\Gamma(A)|\geq|A|$，$\Gamma(A)$ 为 $A$ 的邻域。

**定理 5.2.2 二分图最大匹配计数公式**

$X\to Y$ 最大匹配基数：

$$|M_{\max}|=|X|-\delta(G),\quad \begin{cases}\delta(A)=|A|-|\Gamma(A)|,\ \delta(A)\geq 0\\ \delta(G)=\max\limits_{A\subseteq X}\delta(A)\end{cases}$$

**定理 5.2.3（König 柯尼希定理）**

适当选取某些行和列，可以包含 $A$ 中全部非零元，这称之为 $A$ 的**覆盖**。对于能覆盖非零元最少的行、列数和，称为它的**最小覆盖数**，记为 $S$。

二分图中，最大匹配数 $r=$ 最小点覆盖数 $s$，即 $r=s$。

## 5.3. 最佳匹配及其算法

最佳匹配一般是让求一个最大利益/最小成本的问题，也就是给你一个方阵，之后找 n 个不同行不同列的元素使得和最小/最大。下面最小成本来描述最佳匹配算法

由于我们每行每列都一定会选择一个元素，所以我们如果对于一整行/列加减同一个值是不会改变最后的选取的。我们的思路就是这样不断的加减，导出更多的 0 (我们控制不出现负数，0 就是最小的)。最后只需要选取不同行同列的 0 即可。

先解释如何控制不出现负数，比如现在我们要对于第一行减 1，如果出现了负数，那我们就在对应的列，整体加 1.

之后是算法流程：

(1) 每一行减去当前行的最小值

(2) 找到 0 的一个最小覆盖（用经可能少的行和列覆盖所有的 0)，对于剩下的所有元素，取若干行/列覆盖（只能有一种，行就全是行，列就全是列，取经可能少的一个），在这些行/列，减去他们当中最小的元素，并处理负数，重复该操作，直到 0 的最小覆盖已经覆盖了整个矩阵

### 5.4. 网络流

在考试的时候，如果计算最大流，可以考虑注意力：先找到一个割集，之后再找到一种流法使得流量达到割集大小。

**定义 5.5.1 运输网络**

无自环有向连通图 $N$：

1. 唯一源点 $s$（入度为 0)，唯一汇点 $t$（出度为 0)；
2. 边 $(i,j)$ 带非负容量 $c_{ij}$，无边则 $c_{ij}=0$。

允许流中：$f_{ij}=c_{ij}$ 为饱和边，否则非饱和边；最大流：$w_0=\max\sum_j f_{sj}$。

**定义 5.5.2 割切**

$s\in S$，$t\in\overline{S}=V-S$，正向边集 $(S,\overline{S})$ 为割；割容量：$C(S,\overline{S})=\sum_{(i,j)\in(S,\overline{S})} c_{ij}$。

**定理 5.5.3 最大流最小割定理**

$$\max w=\min C(S,\overline{S})$$

**定理 5.5.4 最大流算法：** 一句话记忆，每一次找到一条可以增加流量的路径，Edmonds-Karp 算法则是在此基础上增加了限制：优先考虑最短路。

## 6. 群

这一章的内容很考验理解，如果没有理解就只能死记硬背了。如果不熟悉的话可以多多看看例子，这个真没有什么速成的办法。

如果实在记不住，一档要记住定义和重要的性质

此外，一定要过一遍作业题。群论很多东西没看过就是很难想出来。

### 6.1. 幺群

**定义 6.1.1 半群**

设非空集合 $S$，$\cdot$ 为 $S$ 上封闭二元运算，若满足结合律：

$$\forall a,b,c\in S,\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

则称 $(S,\cdot)$ 为**半群**。

**定义 6.1.2 含幺半群（幺群）**

若半群 $(M,\cdot)$ 存在单位元 $e$：$\forall x\in M$，$e\cdot x=x\cdot e=x$，则称 $(M,\cdot)$ 为**含幺半群（幺群）**。

## 6.2. 群

**定义 6.2.1 群**

非空集合 $G$，二元运算 $\cdot$，$(G,\cdot)$ 是群：

1. 结合律：$\forall a,b,c\in G$，$(ab)c=a(bc)$
2. 单位元：$\exists e\in G,\forall a\in G, ae=ea=a$
3. 逆元：$\forall a\in G,\exists a^{-1}\in G$，$aa^{-1}=a^{-1}a=e$

**定义 6.2.2 Abel 群与群的阶**

群 $G$ 满足 $\forall a,b\in G, ab=ba$ 为 Abel(交换) 群；$|G|$ 为群的阶，有限基数为有限群，否则无限群。

**定理 6.2.3 子群三条件判别**

$H\subseteq G, H\neq\emptyset$ 是子群 $\iff$ $(1)a,b\in H\Rightarrow ab\in H$；$(2)e\in H$；$(3)a\in H\Rightarrow a^{-1}\in H$。

**定理 6.2.4 子群紧凑判别**

$H\leq G \iff \forall a,b\in H,\ ab^{-1}\in H$。

## 6.3. 循环群

**定义 6.3.1 循环群**

群 $G$ 若 $\exists a\in G$ 满足 $G=\langle a\rangle=\{a^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$，则 $G$ 为循环群，$a$ 为生成元。

**定理 6.3.2 生成元计数**

$G=\langle a\rangle$：

1. 无限循环群 $|G|=\infty$：生成元仅有 $a,a^{-1}$；
2. $n$ 阶有限循环群：生成元共 $\varphi(n)$ 个，$\varphi$ 为欧拉函数。

## 6.4. 置换群

这一节要注意置换的计算

**定义 6.4.1**

非空集合 $A$ 的所有一一变换关于变换的乘法作成的群叫作 $A$ 的一一变换群，记作 $E(A)$；$E(A)$ 的子群称作变换群。

当 $A$ 为有限集，如 $A=\{1,2,\ldots,n\}$ 时，$A$ 上的一一变换称为 $n$ 元置换，由置换构成的群称为置换群，置换群是特殊的变换群；讨论置换群前先回顾置换与置换乘法。

**定义 6.4.2**

设 $\alpha,\beta\in S_n$ 均为轮换，若 $\alpha$ 与 $\beta$ 所含元素互不相同，则称 $\alpha,\beta$ 是不相交的轮换。

**定理 6.4.3**

$n$ 次对称群 $S_n$ 中全体偶置换关于置换乘法构成子群，记为交错群 $A_n$；若 $n\geq 2$，则 $|A_n|=\dfrac{1}{2}n!$。

**定理 6.4.4（Cayley 定理）**

任意群 $G$ 都同构于某个变换群。

## 6.5. 陪集

**定义 6.5.1**

设 $H$ 是群 $G$ 的子群，$\forall a \in G$，集合

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

称为 $H$ 在 $G$ 中的左陪集；同理右陪集定义为

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}.$$

**定理 6.5.2**

设 $H \leq G$，左陪集满足下述性质：

1. $H = eH$，$a \in aH$；
2. $|aH| = |H|$；
3. $a \in H \iff aH = H$；
4. 若 $x \in aH$，则 $xH = aH$，$a$ 称作陪集 $aH$ 的代表元；
5. $aH = bH \iff a \in bH \iff a^{-1}b \in H$；
6. $aH \neq bH \implies aH \cap bH = \emptyset$。

**定理 6.5.3**

设 $G$ 为有限群，$H \leq G$，则存在正整数 $k$ 使得

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_kH, \quad a_iH \cap a_jH = \emptyset,\ i \neq j.$$

**定义 6.5.4**

子群 $H$ 在 $G$ 中左（右）陪集的个数称为 $H$ 在 $G$ 里的指数，记作 $[G : H]$。

**6.5.5.Lagrange 定理**

$G$ 有限，$H \leq G$，则

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

## 6.6. 正规子群和商群

**定义 6.6.1**

设 $H \leq G$，若 $\forall a \in G$ 满足 $aH = Ha$，则称 $H$ 为 $G$ 的正规子群（不变子群），记作 $H \triangleleft G$；对正规子群不再区分左、右陪集，直接简称陪集。

**定理 6.6.2**

设 $H \leq G$，下述四条条件互相等价：

1. $H \triangleleft G$；
2. $\forall g \in G,\ gHg^{-1} = H$；

3. $\forall g \in G,\ gHg^{-1} \subseteq H$；

4. $\forall g \in G, \forall h \in H,\ ghg^{-1} \in H$。

**定理 6.6.3**

设 $A, B \leq G$：

1. 若 $A \lhd G$, $B \lhd G$，则 $A \cap B \lhd G$，$AB \lhd G$；

2. 若 $A \lhd G$, $B \leq G$，则 $A \cap B \lhd B$，$AB \leq G$。

**定理 6.6.4**

设 $H \lhd G$，以 $G/H$ 表示 $H$ 的全体陪集构成的集合，在陪集乘法运算下 $G/H$ 成群，称为 $G$ 关于 $H$ 的商群。

### 6.7. 同态和同态基本定理

**定义 6.7.1（群同态）**

设群 $G_1, G_2$，映射 $f : G_1 \to G_2$，满足

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \forall a, b \in G_1,$$

称 $f$ 为同态：

- $f$ 单射 $\Rightarrow$ 单一同态；
- $f$ 满射 $\Rightarrow$ 满同态，记 $G_1 \sim G_2$，$G_2$ 是 $G_1$ 的同态象；
- $f$ 双射 $\Rightarrow$ 同构（既单又满的同态）。

**定理 6.7.2（同态核）**

设 $f : G \to G'$ 为群同态，$e'$ 是 $G'$ 单位元，记

$$\operatorname{Ker} f = \{a \in G \mid f(a) = e'\},$$

则 $\operatorname{Ker} f \lhd G$，$\operatorname{Ker} f$ 称为同态 $f$ 的核。

**定理 6.7.3**

$f : G \to G'$ 同态，$K = \operatorname{Ker} f$，则 $\forall a, b \in G$,

$$f(a) = f(b) \iff b \in aK.$$

**定理 6.7.4**

同态 $f$ 是单一同态 $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \{e\}$（核为平凡子群）。

**6.7.5 同态基本定理（第一同构定理）**

1. $G$ 的任意商群 $G/K$ 都是 $G$ 的同态象；

2. 若 $G'$ 是 $G$ 的同态象，$f : G \twoheadrightarrow G'$ 满同态，则

$$G' \cong G/\operatorname{Ker} f.$$

**定理 6.7.6**

$K \triangleleft G$，$K \subseteq H \leq G$，记 $G' = G/K$, $H' = H/K$：

1. $H' \leq G'$;
2. $\varphi : H \mapsto H/K$ 是 $\{H \mid K \subseteq H \leq G\} \to \{H' \mid H' \leq G'\}$ 的双射；
3. $H \triangleleft G \iff H' \triangleleft G'$，此时
$$\frac{G}{H} \cong \frac{G/K}{H/K}.$$

**定理 6.7.7**

$H \leq G$, $K \triangleleft G$，则

$$\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}, \quad \varphi(hK) = h(H \cap K),\ h \in H.$$

## 二. 一些技巧

离散大题并非很简单，很多题目存在一些技巧，下面把我能想起来的写一写。

注：例题能看的看一看）都是往年题和作业

### 1. 归纳

我的一位数学老师曾经告诉我，在数学证明中，使用归纳法和反证法就应该如果呼吸喝水一般自然。

反证，归纳，构造是离散数学中最最基础的技巧，考试的时候如果卡住一定要试一试.

归纳法的核心在于**减治**。也就是减小问题规模的同时，不破坏条件。一个题如果能进行这样的减治，那归纳法一定是没问题的。

当然，我们经常看到的可能不是直接的减治，而是从 $n$ 推到 $n+1$, 不过在图论中还是直接的减治更多

**例 1.**

在简单图 $G$ 中，证明：若 $n \geq 4$ 且 $m \geq 2n-3$, 则 $G$ 中含有带弦回路

**证明：**基例 $n = 4$ 时,$m = 5$ 或 6, 易知 $G$ 中含有带弦回路

去除 $G$ 中一个度数小于等于 2 的节点, 得到 $G'$，再次去除 $G'$ 中一个度数小于等于 2 的节点，重复操作直到最终图 $L$ 中节点度数均大于等于 3 或者 $n = 4$，若为后者则 $L$ 中存在带弦回路，进而 $G$ 中存在带弦回路

若 $L$ 中节点度数均大于等于 3，考虑取 $L$ 中的一条极长道路 $l : v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$

由于该道路极长，所以与 $v_1$ 相连的顶点必然在 $v_2$ 到 $v_k$ 中，结合 $d(v_1) \geq 3$，不妨设与 $v_1$ 相连的三个顶点为 $v_2, v_i, v_j (i \leq j)$，从而 $v_1 \to \cdots \to\to v_j \to v_1$ 是一个回路，且存在弦 $(v_1, v_i)$

进而 $G$ 中存在带弦回路

综上得证

**例 2.**

定义树的中心为以其为端点的最长初级道路长度最小的顶点。证明: 任意一棵树至多有两个中心，且当有两个中心时，这两个中心相邻

**证明：** 显然有初级极长道路的端点是叶节点，因此只要存在非叶节点 (即 $n \geq 3$)，中心便不是叶节点。

而且此时若去除所有叶节点，则所有极长道路长度都减一，中心不变！问题保持不变，从而减治即可完成。

## 2. 反证

反证大家一定都非常熟悉，下面介绍一类反证：取极值点导出矛盾

这类的典型是哈密顿回路，比如以下重要定理的证明：

如果简单图 $G$ 中任意两结点 $v_i, v_j$ 之间恒有 $d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1$，则 $G$ 中存在哈密顿道路。

我们假设存在一个极长道路，之后通过条件可以反证，如果道路长度不是 $n$，就一定存在更长的道路

之后再给一个需求很强注意力的例子：

**例 3.**

对于图 $G$, 若存在两个不相邻的顶点的度数之和大于 $n$, 则将它们连起来, 直到无法再进行下去, 得到的图 $G^*$ 为 $G$ 的闭合图.

(1) 证明闭合图唯一;

(2) 将有 $v$ 的顶点的图 $G$ 中所有点的度数由大到小排列起来 $(d_1, d_2, \cdots, d_v)$. 满足若 $d_m \leq m$, 则 $d_{v-m} \geq v - m$. 证明 $G$ 中存在 $H$ 回路.

**证明：**

(1) 假设通过两种不同顺序得到闭合图 $G_1$ 和 $G_2$。我们证明 $G_1 = G_2$。考虑任意边 $e = uv \in E(G_1)$。若 $e$ 是 $G$ 中原有的边，则显然 $e \in E(G_2)$。否则，$e$ 是在某个阶段添加的。在添加 $e$ 的时刻，设当前图为 $H$，满足 $\deg_H(u) + \deg_H(v) \geq n$ 且 $u$ 与 $v$ 不相邻。由于 $H$ 中的边都是 $G_1$ 中在 $e$ 之前添加的边，且它们也属于 $G_2$ (归纳假设)，因此在 $G_2$ 中，$u$ 和 $v$ 的度数至少与 $H$ 中相同，从而 $\deg_{G_2}(u) + \deg_{G_2}(v) \geq n$。若 $u$ 与 $v$ 在 $G_2$ 中仍不相邻，则根据闭合图定义，$G_2$ 也会添加边 $uv$，矛盾。故 $e \in E(G_2)$。因此 $E(G_1) \subseteq E(G_2)$，同理 $E(G_2) \subseteq E(G_1)$，所以 $G_1 = G_2$，闭合图唯一。

(2) 考虑 $G$ 的闭合图 $G^*$。我们首先证明 $G^*$ 是完全图 $K_v$。假设不然，则存在不相邻顶点 $u, v \in V(G^*)$。选取这样的顶点对使得 $\deg_{G^*}(u) + \deg_{G^*}(v)$ 最大，记 $k = \deg_{G^*}(u)$，$l = \deg_{G^*}(v)$，且 $k \leq l$。由于 $u, v$ 不相邻，有 $k + l \leq v - 1$，从而 $k \leq \frac{v-1}{2}$。

定义集合：

$$S = \{x \neq u \mid ux \notin E(G^*)\}, \quad T = \{x \neq v \mid vx \notin E(G^*)\}.$$

则 $|S| = v - 1 - k$，$|T| = v - 1 - l$。由最大性，对任意 $x \in S$，有 $\deg(x) \leq l \leq v - 1 - k$；对任意 $x \in T$，有 $\deg(x) \leq k$。注意 $u$ 本身满足 $\deg(u) = k \leq v - 1 - k$，且 $u \in T$。因此：

- $S \cup \{u\}$ 包含 $v - k$ 个顶点，每个度数 $\leq v - 1 - k$，故在 $G^*$ 的度序列中，第 $v - k$ 大的数 $d^*_{v-k} \leq v - 1 - k$。从而 $d_{v-k} \leq d^*_{v-k} \leq v - 1 - k$。

- $T$ 包含 $v - 1 - l$ 个顶点，每个度数 $\leq k$。由 $k + l \leq v - 1$ 得 $v - 1 - l \geq k$，故至少有 $k$ 个顶点度数 $\leq k$，于是第 $k$ 大的数 $d^*_k \leq k$，从而 $d_k \leq d^*_k \leq k$。

由条件，若 $d_k \le k$，则 $d_{v-k} \ge v-k$。但已证 $d_{v-k} \le v-1-k$，矛盾。故假设不成立，$G^*$ 必为完全图。

完全图显然有哈密顿回路，因此原图 $G$ 也包含哈密顿回路。

## 3. 加边和收缩

对于加边和收缩的定义，可以在本讲义色数多项式的部分找到。不过实际在部分解题过程中，不一定要求收缩时两条边不相连。

这方面典型的一个应用就是闭合图有哈密顿回路等价于原图有哈密顿回路，比如前面的例 3 第二问

**例 4.**

设 $G$ 是有 $n$ 个顶点的简单图，其最小度 $\delta(G) \ge \dfrac{n+q}{2}$，证明 $G$ 中存在包含任意 $q$ 条互不相邻边的哈密顿回路。

**证明：**

对于 $G$ 中任意 $q$ 条不相邻的边 $v_1u_1, \cdots, v_qu_q$，由于互不相邻，所以 $v_i, u_i$ 互不相同

考虑图 $G'$，是将图 $G$ 中的 $v_iu_i$ 视为一个点 $w_i$，其余顶点保留不变，边的关系不变，若顶点 $hv_i$ 和 $hu_i$ 都存在，则在 $G'$ 中 $hw_i$ 存在

这样变化后，一共有 $n-q$ 个顶点，$G$‘ 的最小度大于等于 $\dfrac{n+q}{2} - q = \dfrac{n-q}{2}$，根据推论 2.3.3，$G'$ 中存在 $H$ 回路，从而在 $G$ 中存在包含这 $q$ 条边的 H 回路

**例 5.** 证明：在二分图 $G = (X, Y, E)$ 中，$X$ 到 $Y$ 最大匹配的边数为

$$|X| - \delta(G)$$

其中

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \delta(A), \quad \delta(A) = |A| - |\Gamma(A)| \ge 0$$

**证明：**

设 $A^* \subseteq X$ 满足

$$\delta(G) = \delta(A^*) = |A^*| - |\Gamma(A^*)|.$$

任取 $G$ 中一个匹配 $M$，$A^*$ 内顶点的匹配像只能落在邻域 $\Gamma(A^*)$ 中，故

$$|M \cap E[A^*, Y]| \ \le \ |\Gamma(A^*)|.$$

因此 $X$ 中至少有

$$|A^*| - |\Gamma(A^*)| = \delta(G)$$

个顶点无法被匹配，于是

$$|M| \ \le \ |X| - \delta(G).$$

由 $M$ 的任意性，得

$$\alpha'(G) \le |X| - \delta(G).$$

构造扩充二分图 $G' = (X, Y \cup Y_0, E')$，其中：

- $Y_0$ 为新增顶点集，$|Y_0| = \delta(G)$；

- 原图边保持不变，且任意 $x \in X$ 与所有 $y_0 \in Y_0$ 连边。

对任意 $A \subseteq X$，在 $G'$ 中邻域满足

$$|\Gamma_{G'}(A)| = |\Gamma_G(A)| + |Y_0| = |\Gamma_G(A)| + \delta(G).$$

由 $\delta(G)$ 的定义：

$$|A| - |\Gamma_G(A)| \le \delta(G) \implies |\Gamma_G(A)| + \delta(G) \ge |A|,$$

即

$$|\Gamma_{G'}(A)| \ge |A|, \quad \forall A \subseteq X.$$

由 Hall 定理，$G'$ 中存在 $X$ 的完全匹配 $M'$，满足 $|M'| = |X|$。

去掉 $M'$ 中连接 $Y_0$ 的边，得到 $G$ 内的匹配 $M$，则

$$|M| \ge |X| - \delta(G),$$

从而

$$\alpha'(G) \ge |X| - \delta(G).$$

结合上下界

$$|X| - \delta(G) \ \le\ \alpha'(G) \ \le\ |X| - \delta(G),$$

故

$$\alpha'(G) = |X| - \delta(G).$$

定理证毕。

## 4. 构造映射

群论的证明中，经常使用同态基本定理来证明同构，或者一些数量恒等式

**例 5.** 设 $H, K \triangleleft G$

1. 证明 $HK \triangleleft G$；
2. 证明 $G/HK \cong \big(G/H\big)/\big(HK/H\big)$。

**证明：**

1. 第一步：证 $HK \le G$。$\forall hk, h'k' \in HK$，

$$(hk)(h'k')^{-1} = hk(k')^{-1}(h')^{-1}.$$

由 $K \triangleleft G$，$(k')^{-1}(h')^{-1} = (h')^{-1}k_1$，$k_1 \in K$，代入得

$$hk(k')^{-1}(h')^{-1} = hh'^{-1}k_1 \in HK,$$

故 $HK$ 是 $G$ 的子群。

正规性：$\forall g \in G$，

$$gHKg^{-1} = gHg^{-1} \cdot gKg^{-1} = HK,$$

其中 $gHg^{-1} = H, gKg^{-1} = K$ 来自 $H, K \triangleleft G$，于是 $HK \triangleleft G$。

2. 定义自然同态 $\varphi: G \to G/H$, $\varphi(g) = gH$，$\ker\varphi = H$。设商投影 $\pi: G/H \to \dfrac{G/H}{HK/H}$，$\pi(xH) = \overline{xH}$。复合映射 $\psi = \pi \circ \varphi : G \to \dfrac{G/H}{HK/H}$，$\psi$ 为满同态。

$$\ker\psi = \{g \in G \mid gH \in HK/H\} = HK.$$

由群同态基本定理：

$$G/\ker\psi \cong \mathrm{Im}\psi \implies \frac{G}{HK} \cong \frac{G/H}{HK/H}.$$

.