微积分A2期中

2026 年 4 月 11 日

本讲义涉及的概念以及符号均参考微积分A2教材–高等微积分教程（下）：多元函数微积分与级数，章纪民、闫浩、刘智新著，清华大学出版社，2015年3月第一版。概念和定义均略去。

1 多元函数及其微分学

1.1 极限与连续

极限与连续的概念：略。辅导时，须强调极限的定义。

注 1.1. （*1*）**累次极限存在不能推出极限存在！极限存在也不能推出累次极限存在！**例如：

$$f(x,y) = x\sin 1/y + y\sin 1/x,$$

其在$(0,0)$处存在极限，但不存在重极限。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

累次极限存在，但是重极限不存在。但如果**极限和累次极限均存在**，那么它们必然相等。

（*2*）即使沿着某一方向的极限均存在，也不能推出极限。例如：

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

方向极限均存在，但是重极限不存在。因此，极坐标代换要慎用。

（*3*）我们在一元微积分学的工具在这里都可以使用，如夹逼定理，等价代换等。

（*4*）同一元函数，**有界闭集上的多元连续函数必有最大值最小值**（这句话将在条件极值处起作用），有界闭集上的多元连续函数一定一致连续，连续函数的复合依然是连续函数,。

example 1.1. *1.*$x,y\to 0$时，$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$是否存在极限？

2.$x,y\to 0$时，$\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$是否存在极限？

3.$x,y\to 0$时，$\frac{e^{x^3+y^3}-1}{x^2+y^2}$是否存在极限？

4.$x\neq y.x,y\to 0$时，$\frac{x-y}{\ln x-\ln y}$是否存在极限？

5.$x,y\to 0$时，$(x^2+y^2)^{xy}$是否存在极限？

解答：*1.* 不存在，考虑$y=kx^2$,带入发现极限和k有关，极限不可能存在。

*2.*根据一元函数，$\ln(1+x)=x+o(x),x\to 0$, 于是$\ln(1+x^2+y^2)=x^2+y^2+o(x^2+y^2),x^2+y^2\to 0$,代入即得极限为*1.*

*3.*同*2*，根据一元函数,$e^x=1+x+o(x),x\to 0$,于是

$$\frac{e^{x^3+y^3}-1}{x^2+y^2}=\frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y^2},x^3+y^3\to 0$$

由于$x,y\to 0$可以推出$x^3+y^3\to 0$,所以

$$\lim_{x,y\to 0}\frac{e^{x^3+y^3}-1}{x^2+y^2}=\lim_{x,y\to 0}\frac{x^3+y^3+o(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

再根据$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\to 0,x,y\to 0$,可得原极限为*0.*

*4.*根据中值定理$\ln x-\ln y=(x-y)\frac{1}{x-y+ty},t\in[0,1]$,于是

$$|\frac{x-y}{\ln x-\ln y}|\leq|x-y+ty|\to 0,x,y\to 0.$$

根据夹逼定理，其极限存在为*0.*

*5.*对于这种幂次的题目，我们一般直接取对数。取对数只需看$xy\ln(x^2+y^2)$极限是否存在。一元微积分中，我们有$x\ln x\to 0,x\downarrow 0$,我们猜测这个极限就是*0*。我们可以将$xy$适当放大至$\frac{x^2+y^2}{2}$,于是

$$|xy\ln(x^2+y^2)|\leq|\frac{x^2+y^2}{2}\ln(x^2+y^2)|\to 0,x,y\to 0$$

由夹逼定理立得极限为*0*，从而原极限为*1*。

1.2 微分，偏导，梯度及链式法则

微分、偏导数、梯度、方向定义与复合函数求导法则：略。辅导时须强调可微的定义，以及可微定义中的系数与偏导数的关系，如何判断可微，以及链式法则的应用，

注 1.2. （*1*）如果 f 在 x 处的梯度存在，则有 $\frac{\partial f}{\partial h} = \nabla f \cdot h$。
（*2*）

（*3*）判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微，只需要验证：

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2}), x, y \to 0$$

是否成立。

（*4*）当不知道如何计算微分的时候，请回到微分的定义。即，作差$f(x+h) - f(x)$，然后将其变成$A \cdot h + o(h)$的形式。

example 1.2. *1.*判断$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$在$(0,0)$处是否可微？

*2.*若$\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{f(x,y)-3-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, f(x,y)$是否在$(0,0)$处可微？如果可微，请问$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = ?\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = ?f(0,0) = ?$

3.$\frac{x^2}{2} + y^2$在$(3,2)$处方向导数的最大值为？

*4.*已知可微函数$f(x,y)$在$(0,0)$沿着$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$的方向导数为$\sqrt{2}$,沿着$(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$的方向导数为$\sqrt{2}$, f 在此点的梯度为？

解答：*1.*直接计算可得$f(0,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$。根据可微定义，我们只需判断 $x, y \to 0$时，$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的极限是否存在且是否为*0*。取$y = kx$，可以看到它的极限不存在，因此 f 在原点不可微。

*2.*原极限等价于

$$f(x,y) = 3 - x - y + o(\sqrt{x^2+y^2}), x, y \to 0.$$

因此，根据可微的唯一性，立得$f(0,0) = 3, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$,且可微。

3.此点的梯度为$(3,4)$，由于方向导数的最大值等于梯度的长度，故其为5。

4.设梯度为(x,y),根据$\frac{\partial f}{\partial h}=\nabla f\cdot h$，

$$(x,y)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2};(x,y)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}.$$

可得$x=0,y=2$。于是有此处的梯度为$(0,2)$.

example 1.3. 已知函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$$

则在点 $(0,0)$ 处（ ）

(A) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 可微 (B) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 不可微

(C) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 可微 (D) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 不可微

解答：答案C。直接计算发现$f_x(0,0)=0,f_y(0,0)=0$,由于$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0,x,y\to 0$，$f$在原点可微。$xy\neq 0$时，$\frac{\partial f}{\partial x}$可直接算出，代入发现不存在。

example 1.4. 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\mathbf{n}=(1,2,2)$ 的方向导数为（ ）。

(A) 12 (B) 6 (C) 4 (D) 2

解析：答案为D.注意，方向导数定义中的向量是单位向量！因此$\mathbf{n}$对应的单位向量为：$(1/3,2/3,2/3)$，此时$\nabla f=(4,1,0)$，代入$\nabla f\cdot h$ 即得答案为2.

example 1.5. 关于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy, & xy\neq 0,\\ x, & y=0,\\ y, & x=0,\end{cases}$$

给出以下结论：

① $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 1$ ② $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)} = 1$ ③ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ④ $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$

正确的个数是（ ）。

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

解析：答案B.根据偏导数的定义，可以判断*1*正确。由于$\frac{\partial f}{\partial y}$在$(0,0)$不连续，因此其不可微，*2*错误。根据极限定义，*3*正确。根据重极限定义，*4*正确。

example 1.6. *1.*已知$g(x,x^2) = x, \frac{\partial g}{\partial x}(x,x^2) = x$,求$\frac{\partial g}{\partial y}(x,x^2) =?$

2.$h = F(x,y,z(x,y)), F, z$ 二阶连续可微，求$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$.

解答：*1.*等式两边对x求导，利用链式法则

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,x^2) + 2x\frac{\partial g}{\partial y}(x,x^2) = 1$$

直接解得$\frac{\partial g}{\partial y}(x,x^2) = -\frac{1}{2}$。

*2.*这里我们为了防止弄错，用F_1表示$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$,$F_2, F_3$类似，由链式法则，

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y,z(x,y)) + F_3(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),$$

再由链式法则，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z(x,y)) \times \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \\
&\quad + F_3(x,y,z(x,y))\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) \\
&= F_{12}(x,y,z(x,y)) + F_{13}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \\
&\quad + (F_{32}(x,y,z(x,y)) + F_{33}(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)) \times \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \\
&\quad + F_3(x,y,z(x,y))\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

遇到这种问题，推荐采用类似于上面的做法，否则容易产生混乱。

1.3 隐函数与反函数定理

期中考试反函数隐函数只需要会用就行了，只需要注意定理使用的条件和结论就可以了。辅导时，最好带着同学熟悉一下隐函数反函数定理，

强调条件。

注 1.3. （*1*）二元情形，如果我们把$F(x,y)=0$点表示在坐标平面内，那么隐函数定理可以理解为，如果F在(x_0,y_0)的梯度不为*0*，那么$F(x,y)=0$一定在(x_0,y_0)处不分叉（即在(x_0,y_0)附近满足$F(x,y)=0$的x和y一一对应）。换言之，如果$F(x,y)=0$在(x_0,y_0)处分叉，那么它的梯度一定为*0*!（需在黑板画图解释一下）

（*2*）隐函数反函数定理可以这样记，仅以隐函数为例。若$F(x,y)=0$确定了隐函数函数$y(x)$，那么$y'(x)$可通过这种办法求:

$$F(x,y(x))=0,$$

两边对x求导，利用链式法则

$$F_1+F_2y'(x)=0.$$

example 1.7. *1.*说明$z^3-2xz+y=0$在点$(1,1,1)$的领域中确定了一个C^2隐函数$z(x,y)$,并求z的一阶导和二阶导.

2.

8. 图中红色曲线是一个C^∞函数$f(x,y)$的一条等高线。

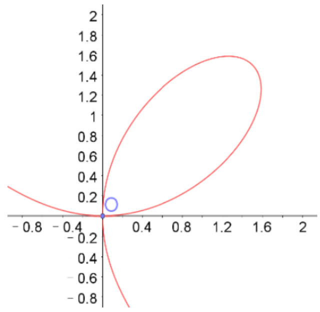
则f在原点O处的梯度向量是

(A) 零向量

(B) 沿x轴的一个非零向量

(C) 沿y轴的一个非零向量

(D) 沿直线$y=x$的一个非零向量



答案： A

解析： 如果梯度向量不为零，则由隐函数定理知$f(x,y)$的等高线在原点O附近应该是一个函数图像。但所给曲线不满足这个必要条件。

解答： *1.*令$F(x,y,z)=z^3-2xz+y$，直接计算F_3即可说明存在C^2的隐函数（因为F是C^2的，所以隐函数也是）。由$F(x,y,z(x,y))=0$,直接两边对x,y求导（须求两次），而后解方程，即可算出所有一阶导和二阶导，一阶导结果如下:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=2,\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-1.$$

二阶导结果如下:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)=-16,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1)=-6,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=10.$$

example 1.8. 设有三元方程

$$xy - z\ln y + e^{xz} = 1,$$

根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程（）

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$

解答：直接套用隐函数定理，令$F = xy - z\ln y + e^{xz} - 1$，计算偏导发现$F_x \neq 0, F_y \neq 0, F_z = 0$，故选$D$。

1.4 切线、切平面、法线与Taylor公式

这部分只需要记住公式就行了。辅导时，可以画图直观地帮同学理解记忆，尤其是曲线2，曲面1，2。

1.4.1 曲线部分

对于曲线，曲线一般有两种表示：

1.$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$，此时其在$(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$处的切线方程为：

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

2.曲线由$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$给出，其在$(x_0, y_0, z_0)$处的切向量为$(a,b,c) = \nabla F \times \nabla G$，因此切线方程为：

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

1.4.2 曲面部分

对于曲面，曲面也有两种表示方式：

1.曲面由$F(x,y,z)=0$给出，则在(x_0,y_0,z_0)处的法向量为∇F,于是有切平面为

$$(x-x_0)F_1+(y-y_0)F_2+(z-z_0)F_3=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_1}=\frac{y-y_0}{F_2}=\frac{z-z_0}{F_3}.$$

2.曲面由参数给出，即$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$,则在$(u_0,v_0)$处的法向量为$(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u})\times(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})$，剩下的同1.

1.4.3 Taylor公式部分

对于Taylor公式，需要记住二阶Peano形式，即

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)+\nabla f(\mathbf{x}_0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^TH(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+o(\|\mathbf{x}-\mathbf{x_0}\|^2)$$

特别地，对于二元函数，有

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\&+\frac{1}{2}f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\&+\frac{1}{2}f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)\end{aligned}$$

注 1.4. *（1）请注意，同一原函数，Taylor公式具有唯一性，即二阶连续可微函数f如果在原点附件可以写成$P(x,y)+o(x^2+y^2)$,P二次多项式，那么 P 一定是Taylor多项式。*

（2）之前微分可以视为一阶的Taylor公式。同一元函数，此时Taylor可以用于求极限的计算。

example 1.9. *1.*

. 曲面 $S: \mathrm{e}^{xyz}+x-y+z=3$ 在点 $(1,0,1)$ 处的法线

2.

曲线 $\begin{cases}e^x+\cos y+z=0\\x+y-z=2\end{cases}$ 在点 $(0,0,-2)$ 的一个单位切向量为 ________

*3.*曲面S由参数方程$(u,v)\mapsto(u\cos v,u\sin v,v)$给出，求其在$(u,v)=(0,0)$处的切平面方程.

解答：略，直接套公式（上课应该会演示，尤其是叉乘的计算。）

答案为*1.*$\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-1}{1}$

2.$\left(-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)$,二选一即可

3.$y=0$

1.5 极值与条件极值

核心概念：极值、最值、驻点的定义，可微函数极值点处梯度为0，Hessian 矩阵判定极值点定理，Lagrange乘子法。辅导时，可以直接叙述定义和定理，但需要强调如下注意事项。

这里需要强调几点注意事项：（（5）较难，时间不够就不讲了）

注 1.5. （*0*）最值点一定是极值点。

（*1*）极值的定义与 f 是否连续是否可微均无关。因此，利用极值点处梯度为*0*，请务必说明 f 在该点可微。

（*2*）*Hessian* 矩阵判断极值点，只能在集合的内部判断！因为只有集合的内部才有可微/微分的概念！

（*3*）如果 f 二阶连续可微，那么，极大值处的 *Hessian* 矩阵一定半负定，极小值处的 *Hessian* 矩阵一定半正定。（请注意！此时只能得到半正定/半负定，例如 $f(x,y)=x^4+y^4$ 在 $(0,0)$ 取极小，但 *Hessian* 矩阵只有半正定）

（*4*）在利用 *Lagrange* 乘子法求出驻点后，即便驻点的 *Hessian* 矩阵不定，也无法说明一定不是极值点。例如 $f(x,y)=x^2-y^2$，限制条件为 $x+y=0$，在该限制条件下 f 恒为*0*，根据定义，原点是其极小值点，但其 *Hessian* 矩阵不定。

（*5*）判断 *Lagrange* 乘子法的驻点是否为极值点，一般是将限制条件在驻点附近利用隐函数定理参数化，然后再利用 *Hessian* 矩阵判断。或者求出限制条件在驻点附近的切向量/切平面，将切方向代入原函数在驻点的 *Hessian* 矩阵。

example 1.10. 利用 *Lagrange* 乘子法求线段 $x^3 - 3xy + y^3 = 0(x \geq 0, y \geq 0)$上的点到原点距离的最大值。

解答：第一步，明确目标函数和限制条件：目标函数

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

限制条件：

$$x^3 - 3xy + y^3 = 0, x \geq 0, y \geq 0.$$

令 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^3 - 3xy + y^3)$，由于限制条件下的最大值点一定是条件极值点，我们只需要求出所有的条件驻点，然后代入求解出驻点的最大值即可。求导

$$\begin{aligned} 2x + \lambda(3x^2 - 3y) &= 0, \\ 2y + \lambda(-3x + 3y^2) &= 0, \\ x^3 - 3xy + y^3 &= 0. \end{aligned}$$

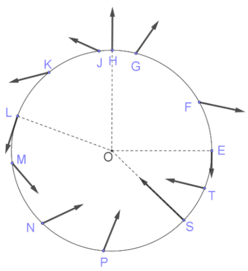
解得（直接消去λ）,$x = y = \frac{3}{2}$,代入即得最大值为$\frac{9}{2}$。

example 1.11. *1.*

13. 如图，已知 f 是一个二元连续可微函数，它在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上各点处的梯度都是非零向量，并且仅在 E, L 两点处的梯度向量与圆周相切，仅在 H, S 两点处的梯度与圆周正交。

则函数 f 在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上，

(A) 在 H 处取最大值，在 S 处取最小值；
(B) 在 H 处取最小值，在 S 处取最大值；
(C) 在 E 取最大值，在 L 取最小值；
(D) 在 E 取最小值，在 L 取最大值。



答案：B

梯度的方向为 f 变化最快的方向，沿着圆周逆时针走，可以看到从H到 S，f的值在增加，从 S 到 H ，f 的值在减小，因此其在 H 取最大，S 取最小。

2.

15. 设 $f(x,y)=\dfrac{|x|+y^2}{x^4+y^4+1}$. 则

(A) f 既有最大值，也有最小值；
(B) f 有最小值，没有最大值；
(C) f 有最大值，没有最小值；
(D) f 既没有最大值，也没有最小值。

答案：A

f 的最小值显然为0，由于在无穷远处 f 的极限为0，注意到$f(1,1)>0$，因此存在 $R>0$，使得$x^2+y^2>R^2$时，$|f(x,y)|<f(1,1)/2$。我们在再$x^2+y^2\le R^2$利用连续函数必有最大值，即可得到 f 在全空间上存在最大值。

3.已知$f(x,y)$在$(0,0)$的某个领域内二阶连续可微，且$\lim\limits_{x,t\to 0}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则下面说法正确的是：

(A) 原点是的极值点

(B) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=-1$

(C) 原点是极小值点

(D) 以上说法均不对

可以看到$f(x,y)=-xy-(x^2+y^2)^2+o((x^2+y^2)^2),x,y\to 0$。由于$(x^2+y^2)^2=o(x^2+y^2),x,y\to 0$,于是，$f(x,y)=-xy+o(x^2+y^2),x,y\to 0$。这说明$f(0,0)=0$且在原点附近，既有$f(x,y)>0$,也有$f(x,y)<0$,因此原点不是极值点。再根据$Taylor$公式的唯一性，立得 B 成立。

example 1.12. 已知方程

$$e^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y-1=0$$

在 $(x,y)=(0,0)$ 的一个邻域中确定了一个 C^∞ 隐函数 $y=y(x)$。则

(A) $x=0$ 是这个隐函数的极小值点；

(B) $x = 0$ 是这个隐函数的极大值点；

(C) $x = 0$ 是这个隐函数的驻点，但不是极值点；

(D) $x = 0$ 不是这个隐函数的驻点。

解析：令$F(x,y) = e^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y-1$,则有：$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$。由链式法则计算得：$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(F_{xx}(x,y(x))+F_{xy}(x,y(x))\frac{dy}{dx})F_y(x,y(x))-(F_{xy}(x,y(x))+F_{yy}(x,y(x))\frac{dy}{dx})F_x(x,y(x))}{(F_y(x,y(x)))^2}$.代入知$y'(0) = 0, y''(0) = -2$，故选$B$.更推荐判断出是隐函数时，直接把$y(x)$代入原方程，然后两边求导!

2 含参积分

核心概念：一致连续与一致收敛。

核心定理（默认函数$f(x,y)$连续，默认$\int f(x,y)dx$）：

- Abel / Drichelet 判别法（一致有界+一致单调趋于0 或一致收敛+一致单调有界）。
- Weistrass 判别法。
- 极限与积分可交换次序:有界比区间上只需 $f(x,y)$连续，无界区间需一致收敛。
- 求导与积分可交换次序：有界区间上定积分需要求导后连续，广义积分需一致收敛。
- 变上下限积分求导：只有 f连续可微才能直接套公式。
- 积分次序交换性：有界闭区域连续即可，关于x积分为广义积分但y有界闭区域需关于y一致收敛，两者均无界一般不考。

注 2.1. *Weisrass* 只能对加了绝对值的函数使用。

注 2.2. （一些经验）

（*1*）本次考试为选择题，**当求含参积分的数值，但又不知道如何判断一致收敛性时**，默认它一致收敛，然后直接积分求导可交换次序，再进行求解。

（2）在求解含参积分时，如果直接求导后发现变得更加复杂，这时需要考虑是否换元等操作。

（3）个人经验，含参积分至多求两次导便能解出。

example 2.1. *1.*说明$\int_0^\infty ye^{-xy}dx$在$[0,\infty)$上不一致收敛。

2.$d>0$,求证$\int_0^\infty ye^{-xy}dx$在 $[d,\infty)$上一致收敛。

3.$\int_0^\infty \sin(xy)/xdx$ 在$[1,\infty)$上一致收敛。

4.$\int_0^\infty e^{-xy}\sin(xy)/xdx$ 在$[0,\infty)$上一致收敛。

解：*2.Weistrass* 判别法。*3,4. Abel/Drichelet*判别法.

*1.*我们先来计算$\int_{x\geq M} ye^{-xy}dx = e^{-yM}$,注意到

$$\lim_{y\downarrow 0} e^{-yM}\to 1, y\to 0.$$

因此，可以取$\epsilon_0=\frac{1}{2}$,则$\forall M>0$,都存在$y(M)\geq 0$,使得

$$\int_{x\geq M} y(M)e^{-xy(M)}dx = e^{-y(M)M}\geq \lim_{y\downarrow 0} e^{-yM}-1/2=1/2,$$

从而知其不一致收敛。

example 2.2. *1.*求$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$。

解答：将x^b-x^a看成某一积分结果，可以看到其为$x^y|_a^b$，对y求导后交换积分次序即可。

2.

12. 含参积分 $f(x)=\int_0^1 \frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{d}t$

(A) 是$\mathbb{R}$上的连续函数，但在$x=0$处不可微；

(B) 仅在$x=0$处间断；

(C) 是$\mathbb{R}$上的可微函数；

(D) 以上选项都不对

答案：C

这个题目是一个“虚假”的含参积分，令 $y=tx$, 换元后即可发现$f(x)=\int_0^x \sin y/ydy$,立得 C 成立。

3. 记含参广义积分

$$f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt,\quad x>0.$$

则

(A) $f(x)$ 关于 $x \in (0, +\infty)$ 一致收敛；

(B) 对所有 $\delta_0 > 0$，$f(x)$ 关于 $x \in (\delta_0, +\infty)$ 一致收敛；

(C) 对所有 $\delta_0 > 0$，$f(x)$ 关于 $x \in (0, \delta_0)$ 一致收敛；

(D) 以上选项都不对

答案：B，利用$Weistrass$判别法即可。

example 2.3. 设函数 $f(t)$ 连续，令

$$F(x,y) = \int_0^{x-y} (x-y-t)\, f(t)\, dt\text{fi}$$

则（　）。

(A) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(B) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(D) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

example 2.4. 已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx^2}}{x^2}\, dx,\ t \in [0, +\infty).$

(A) $f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-tx^2}}{x^2}, & x \neq 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ t, & x = 0,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ 在原点不连续。

(B) $I(t)$ 在 0 处不连续。

(C) $I(t) = \sqrt{\pi t}$

(D) 以上选项都不对

直接判断发现AB不对，对于C，令$f(t)=I(t)-\sqrt{\pi t}$，直接计算发现 $f'(t)=0$同时注意到$f(0)=0$，因此C是对的，故选C。当然也可以利用含参积分，求导，一步一步算出结果。

example 2.5. 计算$\int_0^\infty \frac{\cos x}{y^2+x^2}\,dx, y>0$。

解答：直接对 y 求导发现更复杂，因此考虑先换元。令 $x=ty$，原积分等于$\frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{\cos(ty)}{1+t^2}\,dt$。令$I(y)=\int_0^\infty \frac{\cos(ty)}{1+t^2}\,dt, f(t,y)=\frac{\cos(ty)}{1+t^2}$。直接求导计算即可。最后答案为$I(y)=\frac{\pi}{2}e^{-y}$。