理论力学基础 小班辅导 程阳

运动学

质点的运动

运动方程：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，从运动方程出发在三种坐标系下看待其加速度和速度：

- 直角坐标系：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

- 极坐标系（二维，或者柱坐标系）：

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

- 自然坐标系：

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n},\ \text{其中}\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},\ \boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|$$

注意，在直角坐标系中，曲率半径公式为 $\rho=\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}$。

刚体运动：基点法

刚体的运动可以看作是平动和绕某一基点的转动的叠加。设基点为 O，则刚体上任意一点 P 的速度和加速度为：

$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{OP},\ \boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_{OP}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{OP})$$

注意：速度关联和角速度的一致性。

特例：

- 定轴转动：就是将基点法公式中的 O 取为转轴上的一点 A，则 $\boldsymbol{v}_A=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{a}_A=\mathbf{0}$，从而有：

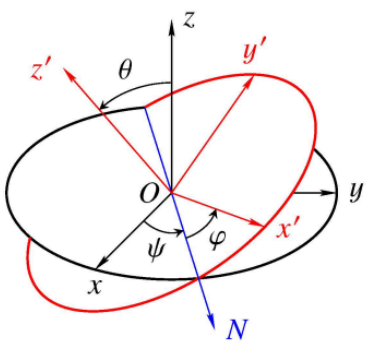
$$\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{AP},\ \boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_{AP}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{AP})$$

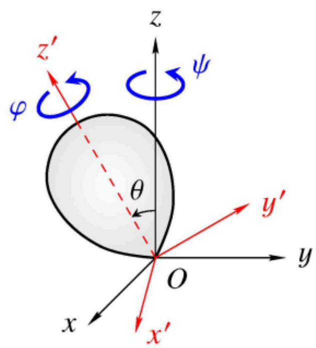
  如果是平面的话，取 z 轴为转轴，则有：

$$\boldsymbol{v}_P = \omega r_{AP}\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{a}_P = \varepsilon r_{AP}\boldsymbol{e}_\theta - \omega^2 r_{AP}\boldsymbol{e}_r$$

瞬心和瞬心轨迹：定瞬心轨迹是瞬心在固定参考系中的运动轨迹。动瞬心轨迹是瞬心在固连的动参考系中的运动轨迹。

欧拉角：首先定义平面 $x'y'$ 与 xy 的交线为节线，其正方向由 $\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_{z'}$ 决定。进而确定角 (ψ, θ, φ)，分别称为进动角、章动角、自转角。这是一种常用的顺序。刚体的定点转动可以拆分成三个相对定轴转动的复合。





更换坐标系：绝对、相对与牵连加速度

在转动系下，设固定参考系为 xyz，动参考系为 $x'y'z'$，则有：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

而对于刚体的角速度合成定理（理解为：绝对角速度 = 相对角速度 + 牵连角速度）为：

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'[\text{相对角速度}] + \boldsymbol{\omega}_{O'}[\text{牵连角速度}]$$

而角加速度合成定理类似：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}'[\text{相对角加速度}] + \boldsymbol{\varepsilon}_{O'}[\text{牵连（1）}] + \boldsymbol{\omega}_{O'} \times \boldsymbol{\omega}'[\text{牵连（2）}]$$

静力学

力系的简化

主矢：力系的主矢定义为：

$$\boldsymbol{R} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

主矩：力系的主矩定义为：

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$$

注意主矩的定义中，$\boldsymbol{r}_i$ 是从参考点 O 指向力 $\boldsymbol{F}_i$ 的作用点的矢量。style="color:red">主矩与参考点的选择有关，其变化关系为：

$$\boldsymbol{M}_P=\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{r}_{OP}$$

等效力系的定义：主矢相同且对同一个点的主矩相同。作用在刚体上的任意力系等效于由一个力和一个力偶构成的力系，这个力的作用线通过刚体上的某个点 O，其大小、方向与原力系的主矢量的大小、方向相同，这个力偶的力偶矩等于原力系对 O 点的主矩。

需要注意的是，力偶和选择计算力矩的参考点是无关的。

但是定义通常都不那么有用，经常使用的是两条推论：

1. 作用在刚体上的力可以沿着其作用线在刚体上滑移而不改变作用效应；
2. 将作用在刚体上的力平行于其作用线在刚体上平移，同时附加一个力偶，其力偶矩等于原来的力对新作用点的矩。

摩擦力和平衡

全反力：$f\leq\mu N$，其中 N 是正压力，μ 是动摩擦系数。所以要求全反力落在摩擦锥里面。

平衡条件：$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{M}_O=\boldsymbol{0}$。

约束

对于考试而言，通常只研究完整约束。即约束方程可以**最终**写成：

$$f(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,t)=0$$

的形式。

可能位移：在约束条件允许的范围内，质点所能发生的任意微小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 称为可能位移，实际计算采用约束方程的微分：

$$\sum_{i=1}^N\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0$$

真实位移：所有可能位移中，同时满足动力学方程的位移称为真实位移。

虚位移：在某一时刻，约束条件允许的范围内，质点所能发生的任意微小位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$，且不考虑时间变化对约束条件的影响，称为虚位移。实际计算采用约束方程的等时变分，对于理论力学而言，通常计算法则类似微分，但是不对时间求导：

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

自由度和广义坐标：设有 N 个质点，且存在 m 条独立完整约束，则系统的自由度为 $s = 3N - m$。选择 s 个独立的广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$，则系统中任一质点的位置矢量均可表示为这些广义坐标和时间的函数：

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t),\ i = 1, 2, \cdots, N$$

然后代入约束方程得到新的约束方程：

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) = 0$$

同样的，我们得到类似的可能广义位移、虚广义位移的定义：

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_j} \mathrm{d} q_j + \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d} t = 0,\ \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

理想约束：如果约束力在任意虚位移下均不做功，则称该约束为理想约束。即：

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

其中 $\boldsymbol{N}_i$ 是作用在第 i 个质点上的约束力。

虚位移原理

对于具有理想约束的质点系，在给定位置平衡的必要和充分条件是，主动动力系在质点系的任意虚位移中所做虚功之和等于零。

$$\sum \delta W_{F_i} = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

形式化结果

上文定义了广义坐标，所以虚位移和虚功可以写作：

$$\delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,\ \delta W=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j,\ \text{其中 } Q_j=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

其中 Q_j 称为第 j 个广义力。

有了这些结果之后我们讨论主动力有势的情况，即广义力可以由势能 $V(q_1,q_2,\cdots,q_s,t)$ 导出：$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$。此时虚功表达式变为：

$$\delta W=-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j=-\delta V\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial q_j}=0$$

平衡稳定性的判定：设系统在位置 $q_{1_0},q_{2_0},\cdots,q_{s_0}$ 处平衡，则在该点处势能的全微分为零，即：

$$\mathrm{d}V=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j=0$$

因为 $\mathrm{d}q_j$ 是任意的，所以 $\frac{\partial V}{\partial q_j}=0$。进一步考虑二阶微分：

$$\mathrm{d}^2V=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 V}{\partial q_j\partial q_k}\mathrm{d}q_j\mathrm{d}q_k$$

如果 $\mathrm{d}^2V>0$ 对任意 $\mathrm{d}q_j$ 都成立，则平衡是稳定的；如果存在某些 $\mathrm{d}q_j$ 使得 $\mathrm{d}^2V<0$，则平衡是不稳定的；如果 d^2V 在某些方向上为零，则需要考察更高阶的微分来判定稳定性。整体来说，二阶导大于零则稳定，小于零则不稳定，等于零则需要更高阶导。

动力学

首先有三大守恒定律

1. 动量守恒定律：在没有外力作用下，质点系的总动量保持不变。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_{\text{外}}\Rightarrow\boldsymbol{P}=\text{常量}$$

   其中 $\boldsymbol{P}=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i$。
2. 角动量守恒定律：在没有外力矩作用下，质点系的总角动量保持不变。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_{O,外}\Rightarrow\boldsymbol{L}_O=常量$$

其中 $\boldsymbol{L}_O=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i$。

3. 机械能守恒定律：在只有保守力做功的情况下，质点系的总机械能保持不变。

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=W_{非保守}\Rightarrow E=T+V=常量$$

其中 T 是动能，V 是势能。

大家学会使用即可，然后还有一些关于质心的方便的推论。

质心动量定理：质心动量的变化率等于外力的合力：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=M\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{F}_外$$

其中 M 是质点系的总质量，$\boldsymbol{a}_C$ 是质心的加速度。

柯尼希定理：刚体或者质点系的动能等于质心动能与相对于质心的动能之和：

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+T'$$

其中 v_C 是质心的速度，T' 是相对于质心的动能。在刚体中，相对动能可以用相对质心的转动惯量和角速度表示：$T'=\frac{1}{2}I_C\omega^2$，其中 I_C 是相对于质心的转动惯量。

碰撞：三大守恒定律的应用

碰撞过程通常可以分为弹性碰撞和非弹性碰撞两种情况。但是都首先满足动量守恒方程：

$$m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2=m_1\boldsymbol{v}_1'+m_2\boldsymbol{v}_2'$$

其中 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 是碰撞前的速度，$\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2'$ 是碰撞后的速度。而是否弹性，利用恢复系数列式比能量守恒方便一些：

$$e=\frac{碰撞后两物体相对速度的大小}{碰撞前两物体相对速度的大小}=\frac{|\boldsymbol{v}_2'-\boldsymbol{v}_1'|}{|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}$$

弹性碰撞时 $e=1$，完全非弹性碰撞时 $e=0$。

分析动力学

D'Alembert原理

原理：作用在质点上的主动力 $\boldsymbol{F}$，约束力 $\boldsymbol{N}$，以及惯性力 $-m\boldsymbol{a}$ 是平衡力系。

D'Alembert - Lagrange原理：对理想约束系统，任意时刻其主动力系和惯性力系在系统的任意虚位移上的虚功为 0，即

$$\sum(\boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{a}_i) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

其中，$\boldsymbol{F}_i$、m_i、$\boldsymbol{a}_i$、$\delta\boldsymbol{r}_i$ 分别为第 i 个质点的主动力的合力、质量、加速度、虚位移。

第二类拉格朗日方程（需要记住）：方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,\ j = 1, 2, \cdots, s$$

其中 T 是系统的动能，Q_j 是第 j 个广义力，q_j 是第 j 个广义坐标，s 是系统的自由度。

如果主动力都是有势力 $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$，则拉格朗日方程可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,\ j = 1, 2, \cdots, s$$

其中 $L = T - V$ 是拉格朗日量。

Lagrange方程的首次积分

广义能量积分：如果所有主动力都有势，且拉格朗日函数不显含时间，则对拉格朗日方程进行时间积分得到：

$$T + V = E = \text{常量}$$

其中 E 是系统的总机械能。（实际上主要是在定常约束）

广义动量：广义动量的定义为

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

如果拉格朗日函数不显含某个广义坐标 q_k，则称该坐标为循环坐标，此时对应的广义动量 p_k 是守恒

的，即

$$p_k = \text{常量}$$