线性代数小班辅导 程阳

以下许多部分写得并不严谨，但是使用和考试会给出清楚的说明。

线性空间与线性映射

线性空间：线性空间是定义在给定数域上的满足八条运算法则的集合。子空间：对加法和数乘封闭的给定线性空间的子集。

向量：如果在线性空间 V 中存在 n 个线性无关的向量，但任意 $n+1$ 个向量都线性相关，则称任意 n 个线性无关的向量为线性空间 V 的**一组基 (basis)**，称 n 为线性空间 V 的**维数 (dimension)**，记作 $\dim_F V = n$。

从而，在给定一组基向量的表示下，线性空间中的任意向量都可以唯一地表示为基向量的线性组合，如：

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 为基向量，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为系数，$\boldsymbol{x}$ 为系数向量。

过渡矩阵：设线性空间 V 的两个基分别为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$，则存在唯一的非奇异矩阵 P，使得

$$(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P$$

该矩阵 P 称为从基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n\}$ 的**过渡矩阵 (transition matrix)**。在该过渡矩阵下，向量 $\boldsymbol{v}$ 在两组基下的坐标向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 满足关系：

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_n)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P\boldsymbol{y}$$

即

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$$

线性映射的表示矩阵：设 V_1, V_2 是数域 F 上的线性空间，$\sigma: V_1 \to V_2$ 是从 V_1 到 V_2 的线性映射。设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 V_1 的一组基，$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 是 V_2 的一组基，则存在唯一的 $m \times n$ 矩阵 A，使得

$$(\sigma(\boldsymbol{e}_1), \sigma(\boldsymbol{e}_2), \cdots, \sigma(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m)A$$

该矩阵 A 称为线性映射 σ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 下的**表示矩阵 (representation matrix)**。

基变换下的表示矩阵：设线性空间 V_1, V_2 的两个基分别为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n\}$，$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}'_2, \cdots, \boldsymbol{f}'_m\}$，设从基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 到基 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n\}$ 的过渡矩阵为 P，从基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 到基 $\{\boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}'_2, \cdots, \boldsymbol{f}'_m\}$ 的过渡矩阵为 Q，则线性映射 $\sigma : V_1 \to V_2$ 在两组基下的表示矩阵 A 和 B 满足关系：

$$B = Q^{-1}AP$$

而如果对于线性变换 $T : V \to V$，则有：

$$B = P^{-1}AP$$

线性映射和矩阵之间存在双射的关系，本质上也是线性映射构成空间的同构。

基变换下的线性映射坐标：设线性空间 V_1, V_2 的基向量分别为 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$，考虑线性映射 $\sigma : V_1 \to V_2$，设 $\boldsymbol{v} \in V_1$ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 下的坐标向量为 $\boldsymbol{x}$，则 $\sigma(\boldsymbol{v})$ 在基 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 下的坐标向量为 $A\boldsymbol{x}$，其中 A 是线性映射 σ 在基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ 下的表示矩阵。

例题1：定义 $M_2(\mathbb{R})$ 上线性变换 $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 满足 $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 T 在下面这组基下的表示矩阵是多少？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例题2：设 $V = \mathbb{R}^3$，σ 为 V 上的线性变换，设 σ 在基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma$ 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，则这组基是多少？

例题3：设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性空间 V 的一个基，σ 是 V 上的线性变换，已知
$\sigma(\alpha_1) = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \quad \sigma(\alpha_2) = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, \quad \sigma(\alpha_3) = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3,$

(1) 求线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵；

(2) 设由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是 $X = (0, -1, 2)^T$，求 $\sigma(\gamma)$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。

线性映射的确定：设 $\sigma \in L(V_1, V_2), \dim V_1 = n, \vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_n$ 是 V_1 的一组基，则 V_1 中任一向量 $\vec{\alpha}$ 的像 $\sigma(\vec{\alpha})$ 由基的像 $\sigma(\vec{\alpha}_1), \sigma(\vec{\alpha}_2), \ldots, \sigma(\vec{\alpha}_n)$ 所完全确定。

线性映射的Image：设 σ 是线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射，V_1 中向量在 σ 的作用下全体象的集合称为 σ 的**像(值域)**，记为

$$\text{Im }\sigma = \sigma(V_1) = \{\sigma(\vec{\alpha}) \mid \vec{\alpha} \in V_1\} \subseteq V_2$$

$\text{Im }\sigma$ 是 V_2 的线性子空间，故称 $\text{Im }\sigma$ 为 σ 的**像空间**。对于像空间的维数，称为线性映射的**秩(rank)**，记为 $\text{rank }\sigma = \dim_F(\text{Im }\sigma)$。其实也等于表示矩阵的秩，即 $\text{rank }\sigma = \text{rank }A = \dim_F(\text{Im }\sigma) = \dim_F(C(A))$。

线性映射的Kernel：设 σ 是线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射，V_1 中所有被映射到零向量的向量的集合称为 σ 的**核(null space)**，记为

$$\text{Ker }\sigma = \{\vec{\alpha} \in V_1 \mid \sigma(\vec{\alpha}) = \vec{0}\} \subseteq V_1$$

$\text{Ker }\sigma$ 是 V_1 的线性子空间，故称 $\text{Ker }\sigma$ 为 σ 的**核空间**。对于核空间的维数，称为线性映射的**零度(nullity)**，记为 $\text{nullity }\sigma = \dim_F(\text{Ker }\sigma)$。其实也等于表示矩阵的零度，即 $\text{nullity }\sigma = n - \text{rank }A = \dim_F(\text{Ker }\sigma) = \dim_F(N(A))$。

维数定理：设 $\sigma : V_1 \to V_2$ 是数域 F 上的线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射，且 $\dim_F V_1 = n < \infty$，则有

$$\dim_F(\text{Ker }\sigma) + \dim_F(\text{Im }\sigma) = n = \dim_F V_1$$

同构：设 V_1 与 V_2 是数域 F 上的两个线性空间，如果存在从 V_1 到 V_2 的一个双射满足：

(1) $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V_1$, 则 $\varphi(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \varphi(\vec{\alpha}) + \varphi(\vec{\beta})$,

(2) $\forall \vec{\alpha} \in V_1, k \in F$, 则 $\varphi(k\vec{\alpha}) = k\varphi(\vec{\alpha})$,

则称 φ 是线性空间的**同构(isomorphism)**，称 V_1 同构于(isomorphic to) V_2，记为 $V_1 \cong V_2$。同构具有许多性质：（1）保零元；（2）保逆元；（3）保线性相关性；（4）保维数。其实同构还是等价关系，自反、对称、传递。

尤其需要知道的是，有限维实空间 V（欧氏空间）同构于 $\mathbb{R}^n$ 当且仅当 $\dim_{\mathbb{R}} V = n$。

子空间与直和：子空间首先是给定线性空间的子集，然后判断其是否对加法和数乘封闭，从而构成线性空间。设 V 是数域 F 上的线性空间，W_1, W_2 是 V 的子空间，则称 $W_1 + W_2 = \{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \mid \vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2\}$ 为 W_1 与 W_2 的**和**。如果 $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$，则称 $W_1 + W_2$ 为 W_1 与 W_2 的**直和(direct sum)**，记为 $W_1 \oplus W_2$。

直和的等价表述：设 $V_1, V_2, \ldots, V_m$ 是 V 的子空间. 则下列叙述等价

(1) $V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ 是直和;

(2) 零向量表示法唯一, 即若 $\mathbf{0} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, 且 $\alpha_i \in V_i$, 则 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \mathbf{0}$;

(3) 对任意 i, $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \mathbf{0}$;

(4) $\dim(V_1 + \cdots + V_m) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_m$.

基扩张定理：设 V 是数域 F 上的线性空间，W 是 V 的子空间，W 中的线性无关组 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k\}$ 可扩展为 V 的一组基 $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \ldots, \vec{\beta}_m\}$。

维数公式：设 V 是数域 F 上的线性空间，W_1, W_2 是 V 的子空间，则有

$$\dim_F(W_1 + W_2) = \dim_F W_1 + \dim_F W_2 - \dim_F(W_1 \cap W_2)$$

像空间和核空间的直和：设 $\sigma : V \to V$ 是数域 F 上的线性空间 V 到自身的线性变换，则有

$$V = \mathrm{Im}\,\sigma \oplus \mathrm{Ker}\,\sigma$$

例题4：设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间. 其中

$$V_1 = \mathrm{span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right),$$

$$V_2=\mathrm{span}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

求 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

解：首先求解矩阵 A_1，使得 $V_1=N(A_1)$。考虑齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\2&1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

利用初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\2&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

所以解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=c_1(1,1,-2,1)^T,c_1\in\mathbb{R}$。若记 $A_1=(1,1,-2,1)$，则 $V_1=N(A_1)$。同理，对 V_2，存在 B_2，使得 $V_2=N(B_2)$。因为齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&3&3&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

的解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=c_2(0,-1,1,0)^T,c_2\in\mathbb{R}$，记 $A_2=(0,-1,1,0)$，则 $V_2=N(A_2)$。

$$V_1\cap V_2=N(A_1)\cap N(A_2)=N\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

例题5：设 n 阶方阵 A 满足 $r(A)+r(I_n-A)=n$. 则 A 是幂等阵.

证明： 令 $V_1=C(A),V_2=C(I_n-A)$. 则有 $V_1+V_2=\mathbb{K}^n$, 这是因为对任意 n 维列向量 $\mathbf{x}$, 我们有 $\mathbf{x}=A\mathbf{x}+(I_n-A)\mathbf{x}$. 接下来由维数公式 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$, 和题设 $\dim V_1+\dim V_2=r(A)+r(I_n-A)=n$ 可知 $V_1\cap V_2=\mathbf{0}$. 因为

$$C(A(I_n-A))\subseteq C(A)=V_1,$$

$$C(A(I_n - A)) = C((I_n - A)A) \subseteq C(I_n - A) = V_2,$$

可知

$$C(A(I_n - A)) \subseteq V_1 \cap V_2,$$

即 $C(A(I_n - A)) = \mathbf{0}$, 也就是 $A(I_n - A) = O$. 所以 A 是幂等阵.

线性相关

主要是几个反证法的例题

例题6：对向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，证明：其中任意 s 个向量均线性无关的充要条件是方程

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

的任一解均至少有 $s+1$ 个非零分量。

例题7：设 A 是 $m \times n$ 矩阵，β 是 m 维非零列向量，已知 β 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系，试证明

(1) $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \ldots, \beta + \alpha_r$ 线性无关；

(2) $Ax = b$ 的解集合的极大线性无关组含有 $r+1$ 个向量。

相似对角化

判断和计算矩阵是否相似对角化的一般步骤如下：
(1) 计算矩阵 $A \in M_n(\mathbb{K})$ 的特征多项式 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$；
(2) 求 $p_A(\lambda)$ 的根。若不是所有根都在 $\mathbb{K}$ 中，则 A 不可对角化；
(3) 设 $p_A(\lambda)$ 的所有根都在 $\mathbb{K}$ 中。若存在一个特征值 λ 使得 λ 的几何重数不等于代数重数，则 A 不可对角化；
(4) 设 $p_A(\lambda)$ 的所有根都在 $\mathbb{K}$ 中且对于每一个特征值都有其几何重数等于代数重数。则 A 可对角化。设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 是 A 的所有互不相同的特征值。对于 $1 \le i \le s$，取特征子空间 V_{λ_i} 的一组基 $\{\mathbf{x}_{i1}, \ldots, \mathbf{x}_{im_i}\}$，其中 $m_i = \dim V_{\lambda_i}$。令

$$P=(\mathbf{x}_{11},\ldots,\mathbf{x}_{1m_1},\mathbf{x}_{21},\ldots,\mathbf{x}_{2m_2},\ldots,\mathbf{x}_{s1},\ldots,\mathbf{x}_{sm_s}).$$

则

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1},\lambda_2 I_{m_2},\ldots,\lambda_s I_{m_s}).$$

可对角化的三大充要条件：设 $A\in M_n(\mathbb{K})$，则下列可对角化的等价表述：

(1) A 可相似对角化；

(2) A 有 n 个线性无关的特征向量；

(3) 对于 A 的落在数域 F 上的每一个特征值，其几何重数等于代数重数。

(4)设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换且 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ 是 φ 的所有互不相同的特征值，则 φ 是可对角化的当且仅当

$$V=V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_k}=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_k}.$$

例题8：设 A 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶幂等阵，则 A 可对角化.

证明：设 λ 是 A 的一个特征值，因为 $A^2=A$，有 $\lambda^2-\lambda=0$. 于是 $\lambda=0$ 或 1，对应的特征子空间为 V_0 和 V_1. 它们分别是齐次线性方程组 $(-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 和 $(I_n-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解空间. 于是

$$\dim V_0=n-r(-A),\quad \dim V_1=n-r(I_n-A).$$

另外，由 $A(I_n-A)=0$ 可知 $r(A)+r(I_n-A)\le n$. 所以

$$\dim V_0+\dim V_1\ge n.$$

进一步可知上式中等号成立. 即 A 有完全特征向量系，所以 A 可对角化.

例题9：Lucas 数列的定义为：$L_1=1,L_2=3,L_{n+2}=L_{n+1}+L_n,n\ge 1$.

(i) 令 $\mathbf{x}_n=\begin{pmatrix}L_n\\L_{n+1}\end{pmatrix}$ $(n\ge 1)$，给出 $\mathbf{x}_n$ 与 $\mathbf{x}_{n+1}$ 满足的关系式.

(ii) 利用 (i) 的结果，求 Lucas 数列的通项公式.

例题10：设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 为可逆矩阵，B 是 3 阶矩阵满足 $BA=\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{13} & -4a_{12} \\ a_{21} & -a_{23} & -4a_{22} \\ a_{31} & -a_{33} & -4a_{32} \end{pmatrix}$，则 B 的全部特征值是?

谱分解定理：实对称阵可正交对角化

Schmidt 正交化过程：设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的内积空间，$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 是 V 中的一组线性无关向量，则可按如下步骤构造出 V 中的一组正交向量组 $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_n\}$：

(1) 令 $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1$；

(2) 对 $k=2,3,\dots,n$，令

$$\mathbf{u}_k=\mathbf{v}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\langle \mathbf{v}_k,\mathbf{u}_j\rangle}{\langle \mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j\rangle}\mathbf{u}_j.$$

QR 分解：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=n$，则存在 $m\times m$ 正交矩阵 Q 和 $m\times n$ 上三角矩阵 R，使得 $A=QR$。

例题10：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的 QR 分解.

谱分解：设 A 是一个 n 阶实对称矩阵. 则存在一个 n 阶正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 是一个对角阵, 且其主对角线元素为 A 的所有特征值.

正交对角化的步骤：

(1) 计算 A 的特征多项式 $p_A(\lambda)=|\lambda I-A|$, 并求出 A 的所有互不相同的特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_t$;

(2) 对每个 $1\le i\le t$, 求线性方程组 $(\lambda_i I-A)\mathbf{x}=0$ 的一个基础解系, 即特征子空间 V_{λ_i} 的一组基, 再用 Gram–Schmidt 正交化方法, 得到 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\{\boldsymbol{\gamma}_{i1},\dots,\boldsymbol{\gamma}_{im_i}\}$;

(3) 令 $Q=(\boldsymbol{\gamma}_{11},\dots,\boldsymbol{\gamma}_{1m_1},\dots,\boldsymbol{\gamma}_{t1},\dots,\boldsymbol{\gamma}_{tm_t})$. 则 Q 是正交矩阵, 且

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_t I_{m_t}\end{pmatrix}.$$

例11：设 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$. 求正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 是一个对角阵.

解: 首先解得 A 的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=2$. λ_1 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$. λ_2 对应的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^T,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^T.$$

对它们用 Gram-Schmidt 正交化可得正交向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$. 故

$$Q=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},\quad Q^TAQ=\begin{pmatrix}8 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}.$$

看起来复杂一点的谱分解：设 A 是一个 n 阶实方阵. 则 A 是对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ A 可正交对角化 $\Longleftrightarrow$ $A=\lambda_1E_1+\cdots+\lambda_sE_s$, 其中 $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ 是互不相同的实数, $E_1,\dots,E_s$ 是实对称阵, 且满足

$$E_i^2=E_i,\quad E_iE_j=0,\quad i\neq j,\quad E_1+\cdots+E_s=I_n.$$

设 A 是一个 n 阶实对称矩阵. 则 $A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)Q^T$, 其中 $Q=(\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_n)$ 是一个正交矩阵. 于是 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_n\}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 并得到 A 的分解式

$$A=(\boldsymbol{\gamma}_1,\dots,\boldsymbol{\gamma}_n)\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\gamma}_n^T\end{pmatrix}=\lambda_1\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_1^T+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{\gamma}_n\boldsymbol{\gamma}_n^T.$$

例12：设 A,B 是 n 阶正定矩阵, 则 AB 正定当且仅当 $AB=BA$.

证明: 必要性显然. 现证明充分性. 若 $AB=BA$, 则 AB 是实对称阵. 因为 A 正定, 存在可逆矩阵 C 使得

$$A = C^TC.$$

于是 $AB = C^TCB$ 与 $(C^T)^{-1}(C^TCB)C^T = CBC^T$ 相似. 又因为 CBC^T 是实对称阵, 而且与 B 相合, 由 B 正定可知 CBC^T 也正定. 所以 CBC^T 的特征值都是正实数. 故 AB 的特征值也都是正实数, 所以 AB 正定.

二次型与谱分解的应用

例题13：设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 是实对称阵，满足 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 2, AB = 0$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 令 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 是相应实二次型.

(i) 用正交替换（主轴化）方法将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形，并求相应可逆线性替换；

(ii) 求矩阵 A;

(iii) 方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示什么曲面?

例题14：设 A 是一个 n 阶可逆实矩阵。

(i) 证明：AA^T 与 A^TA 均为正定矩阵。

(ii) 求矩阵 $M = \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数。

(iii) 证明矩阵 A 可分解为一个正交矩阵 Q 与一个正定矩阵 S 的乘积，即 $A = QS$。

例题15：$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 1$ 表示的二次曲面是________________。

正定矩阵和半正定矩阵：在谱分解视角下看

对于我们考虑的正定与否的问题，通常只需要对实对称矩阵正交对角化，通过观察其对角元的正负即可完成判断。

但仍有传统判定的定理：

1. 一个 n 阶实对称矩阵 A 是正定的当且仅当 A 的所有顺序主子式都大于零。
2. 一个 n 阶实对称矩阵 A 是正定的当且仅当 A 的所有主子式都大于零。
3. 设 A 是一个 n 阶正定阵. 则 A 的主对角线元素都大于零. 而且 A 中绝对值最大的元素仅在主对角线上.
4. 一个 n 阶实对称矩阵 A 是半正定的当且仅当 A 的所有主子式都大于等于零。

尤其需要注意的是：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的顺序主子式都是零, 但 A 显然不是半正定的.

例题16：设 A 为任意 n 阶实反对称矩阵（即 $A^T = -A$），试证明 $I - A^2$ 是正定矩阵.

例题17：一个 n 阶实对称矩阵 A 是半正定的当且仅当对于任意一个正实数 $\lambda, \lambda I_n + A$ 是正定的。

奇异值分解 SVD

定义：设 A 是 $m \times n$ 实矩阵. 若存在非负实数 σ 和非零实向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ 使得

$$A\mathbf{x} = \sigma\mathbf{y}, \quad A^T\mathbf{y} = \sigma\mathbf{x},$$

则称 σ 是 A 的奇异值, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 分别称为 A 关于 σ 的右奇异向量和左奇异向量.

这个定义的来源要源于约束下的多元函数的极值，你们在多元微积分中会学到的拉格朗日乘子法。

奇异值分解的定理：设 A 是一个 $m \times n$ 实矩阵. 则存在 m 阶正交矩阵 P 与 n 阶正交矩阵 Q 使得

$$P^TAQ = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 或 \quad A = P\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T,$$

其中 $S = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$, $r = r(A)$, $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 A 的所有非零奇异值.

奇异值分解的执行步骤:

(1) 求出半正定矩阵 A^TA 的正交相似标准形, 即求 n 阶正交矩阵 Q 使得

$$Q^TA^TAQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0\},$$

其中 $r = r(A)$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ 是 A^TA 的正特征值.

(2) 记 $Q = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 令

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad \beta_i = \frac{1}{\sigma_i}A\alpha_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

(3) 将 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 扩充成 $\mathbb{R}^m$ 一组标准正交基

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_m\}.$$

令 $P = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. 则 $A = P\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T$, 其中 $S = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$.

例题18：求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

解： 计算可得，

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

将 A^TA 正交对角化，求得正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

使得 $Q^TA^TAQ = \mathrm{diag}(36, 1, 0)$。记 $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，令

$$\sigma_1 = 6, \quad \beta_1 = \frac{1}{6}A\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(5,1,2)^T$$

$$\sigma_2 = 1, \quad \beta_2 = A\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,-1)^T$$

再取 $\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$ 使得 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基。令 $P = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$。则得到 A 的奇异值分解为

$$A = P\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^T$$

简化版的奇异值分解：设 $A = P\Sigma Q^T$ 是 A 的奇异值分解且 $r = r(A)$, 即 P 与 Q 分别是 m 与 n 阶正交矩阵, 且

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

其中 $S = \mathrm{diag}\{\sigma_1,\dots,\sigma_r\}, \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 是 A 的所有非零奇异值. 记

$$P = (\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m), \quad Q = (\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n),$$

令 $P_r = (\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_r)$ 是 $m \times r$ 矩阵, $Q_r = (\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_r)$ 是 $n \times r$ 矩阵, 则

$$A = P_r S Q_r^T = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^T.$$

例题19：给定 n 阶可逆矩阵 A 及线性方程组 $Ax = b, A\tilde{x} = \tilde{b}$。求证：

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_n}\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|},$$

其中 σ_1, σ_n 分别为 A 的最大和最小奇异值。

证明：设 $\Delta x = x - \tilde{x}$，$\Delta b = b - \tilde{b}$。由题意知：

$$A\Delta x = \Delta b \implies \Delta x = A^{-1}\Delta b$$

同时有：

$$b = Ax$$

根据矩阵范数的定义及其与向量范数的相容性：

1. 从 $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ 可得：

$$\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

2. 从 $b = Ax$ 可得：

$$\|b\| \le \|A\| \cdot \|x\| \implies \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

将上述两个不等式左边与左边、右边与右边分别相乘：

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

在 L_2 范数下，已知：

- $\|A\|_2 = \sigma_1$
- $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_{\min}(A)} = \frac{1}{\sigma_n}$

代入上式得：

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

正交补和正交投影

正交和：设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是欧氏空间 V 的子空间, 且两两正交. 则

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s.$$

还有**定理**：设 U 是欧氏空间 V 的一个子空间. 则 $V = U \oplus U^{\perp}$, 而且 U 的任意一组标准正交基可以扩充为 V 的一组标准正交基.（正交基版本的基扩张）

正交补和四个子空间：设 A 是一个 $m \times n$ 实矩阵. 则有

$$N(A)^{\perp} = C(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n;$$

$$C(A)^{\perp} = N(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

这是因为齐次方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的任意解向量 $\mathbf{x}$ 与 A 的所有行向量正交. A 对应的线性映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 将 $N(A)$ 映射到零空间, 将 $C(A^T)$ 映射到 $C(A)$.

正交投影：设 $V=V_1\perp V_2\perp\cdots\perp V_k$. 则对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 存在唯一分解

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_k,\quad \boldsymbol{\alpha}_i\in V_i.$$

类似的定义 V 上的线性变换 $\pi_i:V\to V,\pi_i(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_i$. 称为 V 到 V_i 的正交投影. 则 π_i 满足

$$\pi_i^2=\pi_i,\quad \pi_1+\cdots+\pi_k=\mathrm{Id}_V.$$

正交投影的表示矩阵：考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^n$。设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个子空间，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是 U 的一组标准正交基。则对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$，

$$\pi_U(\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_m^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_m.$$

令 $Q=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，则

$$\pi_U(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\alpha}_m^T\boldsymbol{\alpha}=QQ^T\boldsymbol{\alpha}.$$

于是，正交投影 π_U 在 $\mathbb{R}^n$ 的自然基下的表示矩阵为 QQ^T。

显然，上述表示矩阵和 U 的标准正交基的选取无关。

例题20：设 A 是一个 $m\times n$ 实矩阵。设 A 列满秩。求 $\mathbb{R}^m$ 到它的子空间 $U=C(A)$ 的正交投影 π_U 在 $\mathbb{R}^m$ 的自然基下的表示矩阵。

解： 对任意向量 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$，设它到 $C(A)$ 的正交投影为 $\mathbf{b}'$。则存在列向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，使得 $\mathbf{b}'=A\mathbf{x}$ 。于是

$$(\mathbf{b}-A\mathbf{x})\perp C(A).$$

因此

$$\mathbf{b}-A\mathbf{x}\in C(A)^\perp=N(A^T).$$

即 $A^T(\mathbf{b}-A\mathbf{x})=\mathbf{0}$。也就是 $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$。

接下来考虑线性方程组 $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$。因为 $C(A^TA)=C(A^T)$，所以 $A^T\mathbf{b}\in C(A^TA)$，方程组有解。由于 A 列满秩，A^TA 可逆，则存在唯一解 $\mathbf{x}=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$。于是 $\mathbf{b}$ 在 $C(A)$ 上的正交投影为

$$A\mathbf{x}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}.$$

所以 $\mathbb{R}^m$ 到 $U=C(A)$ 的正交投影 π_U 在 $\mathbb{R}^m$ 的自然基下的表示矩阵为

$$A(A^TA)^{-1}A^T.$$

后记

时间有限，有一些内容还没有涵盖到，尤其是线代期中前的内容，以及最小二乘和矩阵产生的四个子空间的理论。希望同学们课后能自行复习。

YAN

重庆 开州区

扫一扫上面的二维码图案，加我为朋友。