

不定积分的求解

1. 常、指、幂、三角等基本积分公式;

*要记住 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C$

2. 三角、分式恒等变形技巧

3. 分部积分法

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

典型应用: (1) $x^n \cdot f(x)$, 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$:

$$\int x^n f(x) dx = x^n F(x) - n \int x^{n-1} F(x) dx$$

(2) $P(x) \cdot f(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式函数

4. 积分换元法

第一积分换元法: 凑微分

(1) 同时出现 $\sin x, \cos x$ 的形式: $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx = \int \frac{d \sin x}{\sqrt{1+\sin x}}$

(2) 特别地, $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

(3) 凑像 $\ln x$ 这样无法直接积分的.

如 $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C$

第二积分换元法

(1) $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $a^2 \pm x^2$ 利用三角函数换元

e.g. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$) $\frac{1}{2} x = a \sin t$ $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

(2) $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$

(3) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + C$

(4) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{x-a} \right| + C$

5. 有理函数的不定积分

(1) 对有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) = (x+a)(x^2+bx+c)^2 \dots$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c} + \frac{Dx+E}{(x^2+bx+c)^2} + \dots$$

对 x 赋值求解 $A, B, C, \dots$, 如取 $x = -a$ 解出 $A \dots$

(2) tips 对于 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $\deg(Q) - \deg(P) = 1$, 可以先凑出 $Q'(x)$ 降次.

e.g. $\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + \arctan x + C$

三角函数不定积分

1. 万能公式: $t = \tan \frac{x}{2}$

2. 若 $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 令 $t = \sin x$; 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 令 $t = \cos x$

无理函数不定积分

1. 含最复杂的根式记为 t . $\int \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}} dt$. 记 $\sqrt{t+1} = x$, $dt = 6x^5 dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}} dt = \int \frac{6x^5}{x^5 + x^3} dx$$

2. 出现 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$, 换元 $\sqrt{\frac{x-a}{x-b}} = t$

3. 出现 $\sqrt{ax^2+bx+c}$, 且 ax^2+bx+c 无实根, $a > 0, c > 0$ 令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$, 其中 $\sqrt{c}$ 前的正负与 b 的系数一致

e.g. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx$, 令 $\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1 \Rightarrow (t^2-1)x = 1-2t \Rightarrow x = \frac{1-2t}{t^2-1}$

$$dx = \frac{-2(t^2-1)-2t(1-2t)}{(t^2-1)^2} = \frac{2t^2-2t+2}{(t^2-1)^2}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x+x^2}} dx = \int \frac{1}{\frac{(1-2t)}{t^2-1} \cdot \frac{2t^2-2t+2}{(t^2-1)^2}} \cdot \frac{2t^2-2t+2}{(t^2-1)^2} dt = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(1-2t)(t+1)(t-1)} dt$$

定积分

1. 黎曼积分定义: $f(x)$ 定义在 $[a, b]$, 对 $\forall$ 划分 $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\forall \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$,

记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 称 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 为积分和, 记 $|T| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

若 $\lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在, 且与 T 无关, 称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积.

2. 记 $M_k = \sup \{f(x) | x \in \Delta_k\}$, $m_k = \inf \{f(x) | x \in \Delta_k\}$

$S(T) = \sum_{i=1}^n M_k \Delta x_k$ (达布上和); $s(T) = \sum_{i=1}^n m_k \Delta x_k$ (达布下和)

性质: ① 对同一划分, 达布下和 $\leq$ 黎曼和 $\leq$ 达布上和

② 随划分加密, 上和不再增加, 下和不再减小.

可积充要条件: $f(x) \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{|T| \rightarrow 0} S(T) = \lim_{|T| \rightarrow 0} s(T)$

另-表述: $f(x) \in R[a, b] \Leftrightarrow \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = 0$

3. 可积函数类: (1) 闭区间上连续函数;

(2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界且有有限个间断点

(3) 闭区间上的单调函数.

4. 定积分的性质: (1) 线性性

$$(2) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$(3) \text{若 } f(x) \leq g(x) \in R[a, b], \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5. 定积分的计算: (1) 若 $f(x) \in R[a, b]$, 记 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $F(x)$ 可导. $F'(x) = f(x)$

(2) $f(x) \in C[a, b]$, $u(x), v(x)$ 可导. $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 可导.

$$F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x) - f(v(x)) \cdot v'(x)$$

$$(3) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

(4) 分部积分法和积分换元法.

※ 积分第一中值定理

设 $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in R[a, b]$ 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 不变号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

注: 在实际解决问题时, 选取 $f(x)$ 很重要. e.g. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$

若 $f(x) = x^n$, 则 $\exists \xi_n \in (0, 1)$, s.t. $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \xi_n^n \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

不能认为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n^n = 0$, 因为 ξ_n 不是常数.

若 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 则 $\exists \xi_n \in (0, 1)$, s.t. $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi_n} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{n+1}$

※ (Cauchy-Schwarz 不等式) $f(x), g(x) \in R[a, b]$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)$$

定积分的应用

(一) 封闭曲线面积

$$(1) y = y(x), S = \int_a^b y(x) dx \quad (2) \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in [a, b], S = \int_a^b \varphi(t) \psi'(t) dt$$

$$(3) r = r(\theta) \text{ 与 } \theta = \alpha, \theta = \beta \text{ 围成图形}, S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta$$

(二) 平面曲线弧长

$$(1) l: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (2) y = f(x) S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$(3) r = r(\theta) S = \int_a^b \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

(三) 平面曲线的曲率和曲率圆

定义: $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = k$, 其中 $\alpha = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)}$

$$(1) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \left| \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \right|$$

$$(2) l: y = f(x) k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

$$(3) r = r(\theta) k = \frac{r^2(\theta) + 2r'(\theta)^2 - r'(\theta)r''(\theta)}{(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{3/2}}$$

曲率半径: $R = \frac{1}{k}$

(四) 旋转体体积

1° 绕 x 轴旋转: 1. $y = f(x)$, $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

2. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $V = \pi \left| \int_a^b y^2(t) x'(t) dt \right|$

2° 绕 y 轴旋转: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

(定理) 立体 Ω 夹在平面 $x=a$, $x=b$ ($a < b$) 之间, 对 $\forall x \in [a, b]$, 该平面对 Ω 截面积 $S(x)$

$$V(\Omega) = \int_a^b S(x) dx.$$

(五) 旋转曲面面积 (绕 x 轴旋转)

(1) $y = f(x)$ $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

(2) $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$ $S = 2\pi \int_a^b |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dx$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \ln |t| dt = t \ln |t| - t$$

第八章 广义积分

一、恒正函数敛散性判别 (或恒负)

比阶判别法: (1) 广义积分: $\exists N \in [a, +\infty)$, s.t. 当 $x > N$ 时, 若

• $|f(x)| \leq \frac{1}{x^p}$, $p > 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛 $\Rightarrow$ 极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p |f(x)| = c, p > 1, 0 \leq c < +\infty$

• $|f(x)| \geq \frac{1}{x^p}$, $p \leq 1$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散 $\Rightarrow$ 极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p |f(x)| = c, p \leq 1, 0 < c \leq +\infty$

(2) 瑕积分: 记瑕点为 a .

• $|f(x)| \leq \frac{1}{(x-a)^p}$ ($p < 1$), $\int_a^b f(x) dx$ 收敛 $\Rightarrow$ 极限: $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^p |f(x)| = c, p < 1, 0 \leq c < +\infty$

• $|f(x)| \geq \frac{1}{(x-a)^p}$ ($p \geq 1$), $\int_a^b f(x) dx$ 发散 $\Rightarrow$ 极限: $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^p |f(x)| = c, p \geq 1, 0 < c \leq +\infty$

二、非恒正、恒负的函数

问题: 比阶判别法中 c 可能不是常数, 而是振荡的.

解决: **比较判别法**. 用 $g(x)$ 代替 $\frac{1}{x^p}$ 或 $\frac{1}{(x-a)^p}$

先判断绝对收敛: 比较, 比阶

再判断条件收敛: (1) Dirichlet 判别法: $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ 收敛.

(2) Abel 判别法: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调有界, 则有 $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ 收敛.

常用的放缩方法: $\sin^2 x \leq |\sin x| \leq 1$

例: 1. 判断 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\log x)^q (\log \log x)^r}$ 的敛散性

$\begin{cases} p > 1 & \text{收敛} \\ p < 1 & \text{发散} \\ p = 1 & \begin{cases} q > 1 & \text{收敛} \\ q < 1 & \text{发散} \\ q = 1 & \begin{cases} r > 1 & \text{收敛} \\ r \leq 1 & \text{发散} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$

2. 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^p}$ 敛散性.

$\begin{cases} p > 1 & \text{绝对收敛} \\ 0 < p \leq 1 & \text{条件收敛} \\ p \leq 0 & \text{发散} \end{cases}$

常微分方程

基本解法: 参变分离

一阶 ODE: 齐次: $\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x})$ 令 $u = \frac{y}{x}$ $\frac{dy}{dx} = u(x) + x u'(x) \longrightarrow \frac{dx}{dy} = g(\frac{x}{y})$

可化为齐次: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$ $\begin{cases} \textcircled{1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 换元 } ax+by \\ \textcircled{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 换元 } x-a_0, y-b_0 \text{ 化为齐次} \end{cases}$

常数变易法: $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$ 先将 $q(x)$ 视为 0, 再将解中的 C 变易为 $c(x)$ 待定.

Bernoulli 方程: $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n$ 换元: $z = y^{1-n}$

$\frac{dz}{dx} = (1-n)p(x)z + (1-n)q(x) \Rightarrow$ 常数变易

高阶 ODE: (1) 降阶法 $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$ 记 $\frac{dy}{dx} = u(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = f(x, u(x))$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$ 记 $\frac{dy}{dx} = u(y)$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u' u$

(2) 特征根法: (1) 单根 λ : $y = e^{\lambda x}$

(2) 重根 λ : $y = e^{\lambda x}, y = x e^{\lambda x}, \dots, y = x^{k-1} e^{\lambda x}$

(3) 复根 $\alpha \pm bi$: $y = e^{\alpha x} \cos bx, y = e^{\alpha x} \sin bx$

非齐次求特解: $f(t) = P_m(t) e^{\lambda t} \Rightarrow x(t) = q_m(t) t^k e^{\lambda t}$ (q, P 次数相同, k 为 λ 的重数)

$f(t) = e^{\alpha t} (A(t) \cos \beta t + B(t) \sin \beta t) \Rightarrow x(t) = t^k e^{\alpha t} (P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t)$

($k: \alpha \pm \beta i$ 作为原方程的特征根重数, $P(t), Q(t)$ 次数为 A, B 最高次数)

(3) Euler 方程: $t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$

记 $s = \ln t, x(t) = z(s)$

$\Rightarrow t \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{ds}, t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}; t^3 \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{d^3 z}{ds^3} - 3 \frac{d^2 z}{ds^2} + 2 \frac{dz}{ds}; \dots$