常微分方程期末复习

水至月生

2026 年 1 月 10 日

本次 qyh 老师开始搞抽象，并未给出任何复习范围，我们不妨假设，他考查的内容他上课都讲过，之后结合知识的重要性，往年考试，我给出了下列考试大纲。一下是几个需要注意的点：

1.qyh 老师每年考试题目风格多变，我们无法预计他到底会考啥，而且往年出重点题目的内容今年几乎没讲，所以做好心理预期

2. 但可以预计的是 ode 的计算量不会太少，手生的最近可以练习一下

3. 有复习方面的问题可以联系 zz777790，有条件的最好可以直接到我宿舍找我（南区 506）

4. 复习建议：过完我强调的知识点后，把往年题能写的写写，练一下计算，之后复习一下作业题（如果是补充证明老师上课大定理没讲步骤的可以不看），有条件看一下最后一章 SL 系统的前面一点的内容

1　知识点复习

1.1　基础

1. 掌握幂级数法，分离变量法和常数变易法，会画最简单的相图；

2. 对于简单的二维系统，掌握将其转化为一维系统解决的方式。

重点：常数变易法：

对于一阶线性 ode：

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

设其初值为 $x(0) = c$，则有其解为

$$x(t) = ce^{\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t b(s)e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}ds$$

对于高阶的情况也成立，会变为：

$$x(t)=e^{\int_0^t A(s)ds}c+\int_0^t e^{\int_s^t A(\tau)d\tau}B(s)ds$$

1.2 高等线性代数

在做部分计算题的时候，最好复习一下矩阵的指数等知识，具体可以参考前几次作业中的高等线性代数题目，主要需求为：学会计算 e^A 这类的计算。

我知道你肯定会，但是建议你复习的时候还是算一算，因为真的不好算

主要为第四周作业后面几个题目。

1.3 平面线性系统

会解二维的线性系统，大概了解二维线性系统解的性质

具体参考第二章讲义

1.4 拓扑共轭

1. 注意流的定义，拓扑共轭的性质和基础的概念。

2. 掌握第五周作业第二题，考试中可能直接使用：

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，设 $f:U\to\mathbb{R}^n$ 是一个连续向量场。设 IVP

$$\dot{X}=f(X);\quad X(0)=Z$$

的解对任意的初值 $Z\in U$ 均可在整个时间轴定义且唯一，记为 $\phi(t,Z)$。进一步假设 $\phi:\mathbb{R}\times U\to U$ 连续。定义

$$\phi_t(Z):=\phi(t,Z).$$

则 $\{\phi_t:t\in\mathbb{R}\}$ 是系统 $\dot{X}=f(X)$ 的相流。

3. 同时掌握证明拓扑共轭的常用技巧：构造一个必定经过的点，具体参考讲义第二章 19 页拓扑共轭的证明

4. 以及证明不拓扑共轭的技巧：利用 0 和无穷导出矛盾

1.5 一般线性系统

学会高阶方程和一阶方程组的转化，及其求解

1.6 解的稳定性

1. 复习讲义上没有的，平衡点局部的拓扑共轭

简单记忆：对于系统 $\dot{X} = f(X)$, 我们求出 $f'(X)$, 这是一个 n 阶方阵，之后对其代入平衡点 X_0, 得到 $f'(X_0)$, 系统在平衡点 X_0 处的便与 $\dot{X} = f'(X_0)X$ 局部共轭

2. 复习平衡点的稳定性（没有笔记看云盘）

简单记忆：

稳定平衡点：不远离

渐进稳定平衡点：不远离的基础上不断靠近

以及稳定平衡点的一个判定定理

3. 学会一类相图的画法：对于系统 $\dot{X} = f(X)$(一般是二维)，判断每个分量在何时增加或减少例如 $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = x - 2 \end{cases}$

1.7 特殊系统

初步了解梯度系统和 Hamilton 系统的特殊性质，也即一个顺着等高线，一个垂直等高线

1.8 核心理论

1.8.1 极大解

1. 熟悉 Picard-Lindelof 定理中区间的构造方式；

2. 简单了解 Picard 迭代；明白关键性质：极大解不会在有限时间内离开任何一个紧区间，学会计算极大解区间

1.8.2 连续性

1. 简单了解关于参数、初值连续性的几个主要结论

2. 掌握 Gronwall 不等式的证明

2 例题、

例 1(第一次作业第 5 题)(分离变量法)

画出由 $f(t,x)=-x^3$ 所决定的方向场，并求解 IVP(初值问题)：

$$\begin{cases}\dot{x}=-x^3,\\ x(0)=1.\end{cases}$$

例 2(第二次作业后几题)(转化为两个一维)

考虑如下 3 个一阶二维系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix}X;\quad \dot{X}=\begin{bmatrix}1 & \\ & -2\end{bmatrix}X;\quad \dot{X}=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -2\end{bmatrix}X.$$

1) 分别画出三个系统的相图。

2) 求解三个系统，并根据解的表达式对相图作出解释。

例 3(转化为一个一维二阶)

考虑如下 2 个一阶二维系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} & 1\\ -2 & \end{bmatrix}X;\quad \dot{X}=\begin{bmatrix} & 1\\ 2 & \end{bmatrix}X.$$

1) 分别画出 2 个系统的相图。

2) 将系统转化为一个等价的二阶 ODE，假设其有形如 $\phi(t)=e^{\lambda t}$ 的解，并由此求解方程。

3) 根据解的表达式对相图作出解释。

例 4(转化为两个一维，常数变易法)

设 $\lambda\in\mathbb{R}$。考虑如下一阶二维系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{bmatrix}X.$$

1) 分 $\lambda>0,=0,<0$ 画出系统的相图。

2) 求解此方程（先求解 y 分量，然后代入 x 分量满足的方程，进而求解 x 分量)。

3) 根据解的表达式对相图作出解释。

例 5(第五周作业习题 8，不共轭证明)

证明如下三个系统互不拓扑共轭：

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}X;\quad \dot{Y}=\begin{bmatrix}-1 & \\ & -1\end{bmatrix}Y;\quad \dot{Z}=\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}Z.$$

例 6(第 6 周作业习题 1，共轭证明)

设 $\lambda, \epsilon > 0$，记

$$J_{\lambda,\epsilon} := \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

考虑系统 $\dot{X} = J_{\lambda,\epsilon} X$。记 S 为以原点为中心的单位圆周。

1) 设 $Z \neq 0$。设 $\phi(t, Z)$ 是系统取初值 $X(0) = Z$ 时的解。证明该解曲线至少与 S 相交一次。解曲线最多与单位圆周相交几次？

2) 取定 $\lambda > 0$。证明存在 $\epsilon_0 > 0$ 使得当 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ 时，系统的每条不为平衡点的相曲线仅与 S 相交一次。

3) 假设同 2)。现取定 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$。定义 $T : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 如下：对每个 $Z \neq 0$，记 $T(Z)$ 是唯一使得 $\phi(t, Z) \in S$ 的 t。证明 T 连续。

例 7(第 7 周作业习题 3，4)

求方程

$$x^{(5)} = -72x - 60x' + 10x'' + 15x'''$$

解空间的一组基。

例 8

求方程

$$x^{(4)} = 16x$$

解空间的一组基。

例 9(第 10 周习题 1)

考虑两个一维向量场 $F : (0,1) \to \mathbb{R}; G : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$F(r) = \frac{r(1-r^2)}{2}; \quad G(r) = \frac{r}{2}.$$

1) 证明 $\dot{r} = F(r)$ 与 $\dot{r} = G(r)$ 的相流均存在，并分别计算它们的相流。

2) 证明 $\dot{r} = F(r)$ 与 $\dot{r} = G(r)$ 拓扑共轭。

3) 证明 $\dot{X} = F(X)$ 与 $\dot{Y} = G(Y)$ 在平衡点附近局部拓扑共轭，这里

$$F(x,y) := \left(\frac{x}{2} - y - \frac{x(x^2+y^2)}{2}, x + \frac{y}{2} - \frac{y(x^2+y^2)}{2} \right);$$

$$G(x,y) := \left(\frac{x}{2} - y, x + \frac{y}{2} \right).$$

复习渐进稳定平衡点和稳定平衡点（没有笔记看云盘）

例 10(第 11 周习题 3)

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ \dot{y} = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

1) 证明：当 $\epsilon = 0$ 时，平衡点不是渐近稳定的。

2) 证明：当 $\epsilon < 0$ 时，对任意的 $p = (x, y, z)$ 满足 $z > -1$ 均有

$$\lim_{t \to \infty} \phi_t(z) = (0, 0, 0).$$