离散数学（1）小班辅导讲义

水至月生

2025 年 12 月 28 日

开篇之前的话：

1. 推荐复习顺序：

完整版：看一遍本讲义 → 做一份往年题/样例题, 看看漏洞 → 复习 ppt, 课本 (个人感觉 ppt 好于课本)→ 过一下作业题 → 再做一份往年题/样例题（这一套整体用时大概 6-8h）

极简版：看一遍本讲义 → 做一份往年题

考试复习往年题很有用。

2. 离散知识点较为琐碎，小心被偷袭

3. 如果对你有帮助请说：谢谢水至月生

4. 作者联系方式：zz777790

1 命题逻辑的基础概念

1. 命题: 命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句

2. 简单命题: 又称原子命题，不能再被继续分割的命题 (不含任何联结词)

复合命题: 由一个或几个简单命题通过联结词所构成的新的命题

3. 常用的联结词:

否定联结词：非，$\neg$

合取联结词：与，$\wedge$

析取联结词：或，$\vee$

蕴含联结词：$\rightarrow (A \rightarrow B = \neg A \vee B)$

双蕴含联结词：$\Leftrightarrow$

其中 $\neg$ 是一元联结词，其它都是二元联结词。(n 元联结词就是联结 n 个命题)

4. 赋值: 设 $p_1\,p_2\,...\,p_n$ 是出现在公式 A 中的全部的命题变项，给 $p_1\,p_2\,...\,p_n$，各指定一个真值，称为对 A 的一个赋值或解释。

若指定的一组值使 A 的真值为 1，则称这组值为 A 的成真赋值;

若使 A 的真值为 0，则称这组值为 A 的成假赋值。

5. 真值表: 将命题公式 A 在所有赋值下的取值情况列成表，称作 A 的真值表。

注意：规定赋值从 00...0 开始，然后按二进制加法，直到 11...1 为止。比如对于 p_1, p_2, 顺序应该是

$$p_1 = 0, p_2 = 0 \to p_1 = 0, p_2 = 1 \to p_1 = 1, p_2 = 0 \to p_1 = 1, p_2 = 1$$

6. 重言式，矛盾式，可满足式:

设 A 为任一命题公式，

1. 若 A 在它的各种赋值下取值均为真，则称 A 是重言式或永真式。

2. 若 A 在它的各种赋值下取值均为假, 则称 A 是矛盾式或永假式。

3. 若 A 不是矛盾式，则称 A 是可满足式

7. 代入规则: 一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

8. 命题形式化: 所谓命题形式化 (符号化)，就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。. 命题符号化的方法：

1. 明确给定命题的含义。

2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

9. 波兰式和逆波兰式:

波兰式即前缀式，逆波兰式即后缀式

转化方式：按照运算的顺序逐步转化，或者逆着运算顺序逐步转化

2 命题逻辑的等值和推理演算

2.1 等值

1. 等值: 给定两个命题公式 A 和 B，设 $P_1, P_2 ..., P_n$ 为出现于 A 和 B 中的所有命题变项，则公式 A 和 B 共有 2^n 个解释。若在任一解释下，公式 A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等值的, 或称等价记作

$$A = B \text{或} A \Leftrightarrow B$$

2. 等值定理: 设 A 和 B 为两个命题公式，$A = B$ 的充分必要条件是 $A \leftrightarrow B$ 为一个重言式。

3. 逆否命题:

一个命题 (原命题) 与它的逆否命题等值

一个命题的逆命题与它的否命题等值

4. 字公式: 子公式若 X 是合式公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式。

5. 置换公式: 设 X 为公式 A 的子公式，用与 X 等值的公式 Y 将 A 中的 X 施以代换，称为置换，该规则称为置换规则。置换后公式 A 化为公式 B，置换规则的性质保证公式 A 与公式 B 等值，即 $A = B$。

6. 基本的等值公式:（这里不全，只写了最常用的几个）

双重否定:

$$\neg\neg P = P$$

分配律:

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

摩根律:

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

蕴含等值式:

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

等价等值式:

$$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

7. 等值演算:

定义: 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算。

方法 1: 列真值表。

方法 2: 公式的等价变换

8. 联结词的完备集: $\{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \to\}, \{\uparrow\}, \{\downarrow\}$

或者在这些基础上多一些联结词

2.2 范式

1. 文字和互补对: 文字与互补对命题变项及其否定式 (如 P 与 $\neg P$) 统称文字。且 P 与 $\neg P$ 称为互补对

2. 合取范式: 形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

的公式, 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为析取式

3. 析取范式: 形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

的公式, 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为合取式

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。

4. 主范式: 主析取范式: 仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式。

主合取范式: 仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式。

极小 (大) 项即包含所有命题变项, 且按顺序排列, 一个命题变项肯定或否定只出现一次的合取 (析取) 式

5. 主范式的简化写法:

否定记为 0, 肯定记为 1, 将所有文字的肯定/否定拼成一个二进制数字, 比如 $P \vee \neg Q$, 为 $(10)_2 = 3$。

例:

$$P \to Q = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) = \vee_{0,1,3}$$

6. 主范式的求法:

(1) 直接利用公式转化

(2) 真值表：合取看 0，析取看 1

(3) 范式相互转化：全集减去主合取范式的角标集的补集即主析取范式的角标集

例：3 个命题变项时，设全集为 U, 主析取范式 $\vee_{2,3,4,5,7}$，对应的主合取范式为

$$\wedge_{U-\{5,4,3,2,0\}} = \wedge_{1,6,7}$$

2.3 推理

1. 重言蕴涵: 给定两个公式 A，B，如果当 A 取值为真时，B 就必取值为真，便称 A 重言 (永真) 蕴涵 B，或称 B 是 A 的逻辑推论。并用符号 $A \Rightarrow B$ 表示。

定理：

(1)$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \to B$ 为重言式。

(1)$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式。

2. 证明方式:

(1) 转化到证明 $A \to B$ 为重言式或 $A \wedge \geq B$ 为矛盾式。

(2) 真值表

(3) 反证法，即 $\geq B \Rightarrow \geq A$

(4) 解释法

(5) 推理演算

(6) 归结法

3. 基本推理公式:

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

$$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$$

4. 推理演算

主要的推理规则:

(1) 前提引入规则; 推理过程中可随时引入前提

(2) 结论引入规则; 中间结论可作为后续推理的前提

(3) 代入规则; 仅限于重言式中的命题变项

5. 归结法: 利用定理：

$A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \geq B$ 为矛盾式。

从而将蕴涵式转化为 $A \wedge \geq B$，之后去对这个式子推理演算，导出矛盾

3 命题逻辑的公理化

1. 公理系统: 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统

2. 公理系统结构:

(1) 初始符号; (2) 形成规则 (3) 公理 (4) 变形规则 (5) 建立定理

3.1 罗素公理

1. 初始符号: $A, B, C...$(大写英文字母，表示命题),

$\neg, \vee$,(表示联结词)

()(圆括号)

$\vdash$(断言符)

写在公式前，如 $\vdash A$ 表示 A 是永真式。

2. 定义:

(1)$A \rightarrow B = \neg A \vee B$

(2)$A \wedge B = \neg(\neq A \vee \neg B)$

(1)$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

3. 公理:（考试会给出）

(1)$\vdash ((P \vee P) \rightarrow P)$

(2)$\vdash (P \rightarrow (P \vee Q))$

(3)$\vdash ((Q \vee P) \rightarrow (P \vee Q))$

(4)$\vdash ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)))$

4. 推理规则:

(1) 代入规则

(2) 分离规则：如果 $\vdash A$ 且 $\vdash (A \rightarrow B)$，那么 $\vdash B$

(3) 置换规则

3.2 王浩算法

不考

4　谓词逻辑的基本概念

1. 个体常项与个体变项: 将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母 $a, b, c, \cdot$ 表示;

将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母 $x, y, z, \cdot$ 表示;

并称个体变项的取值范围为个体域或论域，以 D 表示。

约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。

2. 谓词: 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。

谓词又可看作是由给定的个体域到集合 $\{T, F\}$ 上的一个映射。

3. 量词: 表示个体常项或变项之间数量关系的词，分为全称量词和存在量词两种。

4. 函数: 在谓词逻辑中可引入函数，它是某一个体域到另一个体域的映射。

注意：在命题的形式化种，一般情况都是函数可用可不用

5. 普遍有效公式: 设 A 为一个谓词公式，若 A 在任何解释下真值均为真，则称 A 为普遍有效的公式。

5　谓词逻辑的等值和推理演算

基本的概念和之前的命题的等值和推理演算一致，特殊点主要在于量词。

1. 否定型等值式:

$$\neg(\forall x)(P(x)) = (\exists x)(\neg P(x))$$

$$\neg(\exists x)(P(x)) = (\forall x)(\neg P(x))$$

2. 量词分配等值式:

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)(P(x)) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)(P(x)) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)(P(x)) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)(P(x)) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

3. 等值演算规则:

(1) 置换规则

(2) 换名规则：设 A 为一公式，将 A 中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的约束变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变

(3) 替代规则：设 A 为一公式，将 A 中某个自由出现的个体变项的所有出现用 A 中未曾出现过的个体变项符号代替，A 中其余部分不变，

4. 前束范式设 A 为一阶谓词逻辑公式，如果满足：

(1) 所有量词都位于该公式的最左边;

(2) 所有量词前都不含否定词;

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称 A 为前束范式。

转化方式：(1) 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$。(2) 右移否定词 $\neg$(利用否定型等值式与摩根律) (3) 量词左移 (使用量词分配等值式)。(4) 变元易名 (使用变元易名分配等值式)。

5.SKOLEM 标准型

一阶谓词逻辑的任一公式，若其

(1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词;

(2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，

便得到公式的 SKOLEM 标准型。

转化方式：先将其化为前束范式，之后对于每个存在量词，

(1) 若其左面还有全称量词，则将其化为这些全称量词的函数;

(2) 若其左面没有全称量词，则将其化为常项

6. 基本推理公式

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$
$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$
$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$$
$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$$
$$(\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$$
$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \to R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to R(x))$$
$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$$
$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$$
$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y) \quad \text{（万人迷）}$$

7. 推理演绎

只多了全称 (存在) 量词消去 (引入) 规则，其它同命题推理

8. 归结演绎： (1) 转化为证明矛盾式；

(2) 转化为 SKOLEM 标准型

(3) 略去全称量词

(4) 归结

6 集合

过于基础的一些概念这里省去不写了

1. 集合概念： 集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体。组成一个集合的每个事物称为该集合的一个元素。

注意集合的确定性和不重复性

2. 广义并/交： 设 A 为非空集合，A 的元素也都是集合，将 A 的所有元素的公共元素组成的集合称为 A 的广义交，记作 $\cap A$。类似的有广义并 $\cup A$

3. 幂集： 设 A 为集合，由 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。

4. 集合恒等式：

狄摩根律：

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

5. 幂集合性质：

$$P(A)\in P(B)\Rightarrow A\in B$$

$$A\subset B\Leftrightarrow P(A)\subset P(B)$$

$$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$$

$$P(A)\cup P(B)\subset P(A\cup B)$$

$$P(A-B)\subset (P(A)-P(B))\cup\emptyset$$

$$\cup(P(A))=A$$

6. 传递集合：如果集合 A 的任一元素的元素都是 A 的元素，就称 A 为传递集合

性质：

(1) 对不包含本元 (非集合元素) 的传递集合 A，有 $\emptyset\in A$。

(2) 对任意的集合 A，A 是传递集合 $\Leftrightarrow A\subset P(A)$

(3) 对任意的集合 A，A 是传递集合 $\Leftrightarrow P(A)$ 是传递集合

7. 集合的基数：即集合内元素数量的多少。

性质：

(1)$|P(A)|=2^{|A|}$

(2)$|A\times B|=|A|\times|B|$

(3)(重点) 容斥原理：$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

例题：120 种有多少个数字不是 2，3，5 种任意一个的倍数？

8.ZFC 集合公理：

利用无穷公理可将自然数表示为

$$0=\emptyset$$

$$1=\{\emptyset\}$$

$$2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

$$n+1=n\cup\{n\}$$

这样就会有 $\cup n=n-1$

7 关系

7.1 基础概念

1. 二元关系（有序对的集合）： 如果一个集合满足以下条件之一:

(1) 集合非空，且它的元素都是有序对;

(2) 集合是空集;

则称该集合为一个二元关系，记作 R。二元关系也简称关系。对于二元关系 R，如果 $<x, y> \in R$，也可记作 xRy。

其中，定义域记为 $dom(R)$，值域记为 $ran(R)$

更进一步，设 A B 为集合，$A \times B$ 的任一子集所定义的二元关系称为 A 到 B 的二元关系。

特别当 $A = B$ 时，AxA 的任一子集称为 A 上的一个二元关系。

2. 三个特殊的关系——恒等关系、全域关系和空关系

恒等关系：$I_A = \{<x, x> | x \in A\}$

全域关系：$I_A = \{<x, y> | x \in A \wedge y \in A\}$

空关系：$\emptyset$

3. 关系的一些运算：

逆：$R^{-1} = \{<y, x> | <x, y> \in R\}$

合成：$S \circ R = \{<x, y> | (\exists z)(<x, z> \in R \wedge <z, y> \in S)\}$ （注意从右侧开始算）

限制：$R \uparrow A = \{<x, y> | x \in A \wedge <x, y> \in R\}$

象：$R[A] = \{y | (\emptyset x)(x \in A \wedge <x, y> \in R)\}$

幂次：$R^{n+1} = R^n \circ R$

4. 关系的性质：

自反关系：$\forall a \in A, <a, a> \in R$，则 R 是 A 上的自反关系

非自反关系：$\forall a \in A, <a, a> \notin R$，则 R 是 A 上的非自反关系

对称关系：$\forall x, y \in A, <x, y> \in R \rightarrow <y, x> \in R$，则 R 是 A 上的对称关系

反对称关系：$\forall x, y \in A, <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R \rightarrow x = y$，则 R 是 A 上的反对称关系

传递关系：$\forall a, b, c \in A, <a, b>, <b, c> \in R \rightarrow <a, c> \in R$，则 R 是 A 上的传递关系

对于主要的几个二元关系，要能区分具有上面哪些性质

7.2 闭包

1. 定义： R 的 XX 闭包即具有 XX 性质的，包含 R 的最小集合。

自反，对称，传递闭包分别用 r, s, t 来表示，这里自反性质是最好的，传递性质是最差的

2. 性质：

(1)

$$r(R) = R \cup I_A$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

(2) 并：

$$r(R_1) \cup r(R_2) = r(R_1 \cup R_2)$$

$$s(R_1) \cup s(R_2) = s(R_1 \cup R_2)$$

$$t(R_1) \cup t(R_2) \subset t(R_1 \cup R_2)$$

(3) 自反，对称性在 r, s, t 下作用保持不变

传递性在 r, t 下保持不变

(4)r 可以和 s, t 交换，即 $rs(R) = sr(R), rt(R) = tr(R)$

但是 $st(R) \subset ts(R)$

7.3 等价关系

1. 定义： 满足自反，对称，传递的关系

2. 等价类： 等价关系给出了一个等价类的划分 (不相交，并为 A，无空集)，即有

$$aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$$

3. 商集： $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$

4. 划分： 集合大小为 3 时有 5 种，4 时有 15 种，5 时有 52 种，6 时有 203 种. 划分和等价关系一一对应

7.4 相容关系

1. 定义： 自反的，对称的关系

2. 相容类： 对非空集合 A 上的相容关系 R，若 $C \subset A$，且 C 中任意两个元素 x 和 y 有 xRy，则称 C 是由相容关系产生的相容类，简称相容类。

3. 最大相容类： 如果一个相容类内不能再添加新的元素成为一个更大的相容类，则称其为最大相容类。

4. 覆盖： 对非空集合 A 上的相容关系 R，最大相容类的集合是 A 的一个覆盖，称为 A 的完全覆盖，记作 $C_R(A)$。而且 $C_R(A)$ 是唯一的。而且对于 A 上的每个覆盖，都和 A 上的相容关系一一对应

7.5 偏序关系

1. 定义： 自反的，反对称的，传递的关系

2. 拟序关系： 满足非自反的，传递的关系。它和偏序关系相差一个 I_A，即对于拟序关系 R，$R + I_A$ 就是一个偏序关系

3. 盖住： 如果 $x, y \in A$，$y \geq x$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $z \geq x$ 且 $y \geq z$，则称 y 盖住 x

哈斯图中，只需要画出盖住关系的边

4. 极大元，最大元： 偏序关系中可定义最大（小），极大（小），前者即任何元素都比自身小（大），后者即任何元素都不比自身大（小）。

5. 全序集： 一类特殊的偏序集为全序集：任何 $x, y \in A$，都有 $x \geq y$ 或 $y \geq x$

6. 链，反链：

(1) 如果对任意的 $x, y \in B$，x 和 y 都是可比的，则称 B 为 A 上的链，B 中元素个数称为链的长度。

(2) 如果对任意不同的元素 $x, y \in B$，x 和 y 都不是可比的，则称 B 为 A 上的反链，B 中元素个数称为反链的长度。

7. 分解定理： 对偏序集 $< A, \leq >$，设 A 中最长链的长度是 n，则将 A 中元素分成不相交的反链，反链个数至少是 n。

其对偶定理称为 Dilworth 定理: 定理令 $< A, \leq >$ 是一个有限偏序集，并令 m 是反链的最大的大小。则则 A 可以被划分成 m 个但不能再少的链

8. 良序集： 对偏序集 $< A, \leq >$，如果 A 的任何非空子集都有最小元，则称为良序关系，称 $< A, \leq >$ 为良序集。

性质：(1) 一个良序集一定是全序集

(2) 一个有限的全序集一定是良序集

(3) 任意的集合都可以良序化。

8 函数

部分很基础的概念略去

1. 定义： 对集合 A 到集合 B 的关系 f，若满足下列条件:

(1) 对任意的 $x \in dom(f)$，存在唯一的 $y \in ran(f)$, 使 xfy 成立;

(2)$dom(f) = A$

则称 f 为从 A 到 B 的函数

注意单值性和定义域

2. 数量： $A \to B$ 的函数的集合定义为 A_B, 其数量为 $|A_B| = |B|^{|A|}$

3. 泛函： 形如 $f : A \to B_C$ 的函数

9 实数集合和集合的基数

1. 等势： 对集合 A 和 B，如果存在从 A 到 B 的双射函数，就称 A 和 B 等势，记为 $A \approx B$. 如果不等势，则记为 $\neg A \approx B$

2. 定理： 对于任意集合 A,$P(A) \approx A_2$

3. 康托定理：

(1)$\neg \mathbb{N} \approx \mathbb{R}$

(2) 对于任何集合 A,$\neg A \approx P(A)$

4. 无穷基数： $card(N) = \aleph_0$ $card(R) = \aleph_1$

5. 可数集合： 若集合 A 满足 $card(A) \leq \aleph_0$, 则称集合 A 是可数的

6. 连续统假设： 不存在基数 k 使得 $\aleph_0 < k < \aleph_1$

10 重难点

10.1 形式化

命题形式化的步骤基本如下：

1. 明确给定命题的含义。

2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

而对于谓词的形式化也与此类似，只需要在上面的基础上添加一步，先明确论域，设出谓词。

不过有下面几个注意点：

(1) 论域是否为总论域，如果是的话，一般需要一个谓词明确对象属性，比如设 $P(x): x$ 是人

(2) 注意唯一性，在题目中的表述可能是“有且仅有”“唯一的”，这一类的转化方式为：存在一个 x 满足某某条件且若 z 满足某某条件那么 $z = x$

例题：过平面上的不共线的三点，有且仅有一个圆。

10.2 范式

逐步转化即可

10.3 容斥原理

略

例：求 [99,1000] 的范围内不能被 5,6,8 中任一个数整除的数的个数。

10.4 归结，推理

掌握基础的推理公式即可

10.5 哈斯图

掌握基础的哈斯图的定义，偏序关系性质

10.6 集合

常见的方法有两种：

(1) 利用集合的等式关系

(2) 利用 $A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$

第二种方式写题会更简单无脑一些，但是过程会多很多，但是第一种方式不见得能记住公式 (至少我记不住)

例：证明 $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

10.7 集合等势

掌握常见的构造法

(1) 开区间到 $\mathbb{R}$

(2) 开区间到闭区间

(3)$\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Z}$,2$\mathbb{Z}$ 等

(4)$\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}^2$

(5) 开区间到开区间

10.8 罗素

我想到一个绝妙的解决罗素的方法，可惜这里地方太小写不下了

按照往年的经验，一般这个题的主要问题是没时间了。

我并没有特别好的可以记录的方法，所以附了一篇往届学长的文档。

复习建议：(其实可以不复习)