微积分A(1)期中复习讲座

零、自测

题目：

现有数列 $\{c_{n,k}\}$ 满足：

$$a)\ \ \forall k\in\mathbb{N}^*,\lim_{n\to\infty}c_{n,k}=0$$

$$b)\ \ \exists M\in\mathbb{R},\forall n,k\in\mathbb{N}^*,\sum_{t=1}^{k}|c_{n,t}|\le M$$

$$c)\ \ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}c_{n,k}=1$$

已知 $\{a_n\}$ 收敛，$b_n=\sum_{k=1}^{n}c_{n,k}a_k$，求证：$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n$

一、知识点回顾

第一章 实数系与实数列的极限

1.1 实数系

几个数集的记号：N Z Q R

界与确界

有上(下)界的非空数集必存在上(下)确界

1.2 数列极限的基本概念

***数列极限的定义(n-epsilon语言)**

发散的定义(趋于无穷的数列是否发散？趋于正无穷的呢？)

1.3 收敛数列的性质

收敛数列极限唯一

增删有限项不影响数列极限

收敛数列子列收敛于数列极限

收敛数列一定有界

***极限的保序性**

极限的四则运算（指数、对数）

****夹逼原理**

1.4 单调数列

****单调收敛定理**

数列趋于无穷的定义

***Stolz定理**

数列平均值定理及其逆命题

1.5 关于实数系的几个基本定理

****有界数列必有收敛子列**

柯西列定义（注意辨析写法）

柯西收敛原理

闭区间套定理

第二章 函数 函数的极限与连续

2.1 函数

映射与函数的概念、函数的四则运算

各类初等函数

函数的有界性、周期性、奇偶性、单调性

反函数

2.2 函数极限的概念

邻域与空心邻域

函数的的左（右）极限（有限点处）

***函数极限的定义（有限点处）**

***函数在无穷远点处的极限**

2.3 函数极限的性质

函数极限的唯一性

函数极限可推出某去心邻域有界

****极限的保序性**

****极限的四则运算**

****夹逼原理**

复合函数极限

函数极限与数列极限的关系

2.4 无穷小量与无穷大量

无穷小/大量的定义

****无穷小/大量的阶**

****等价无穷小代换**

2.5 函数的连续与间断

函数（左/右）连续的定义

四则运算与函数复合对于连续性的影响

****间断点的类型与定义**

一致收敛

2.6 闭区间上连续函数的性质

介值定理

单调连续函数的反函数连续

初等函数的连续性

****闭区间上连续函数的有界性与最值存在定理**

第三章 函数的导数

3.1 导数与微分的概念

***导数的定义**

可导必然连续，连续不一定可导

****左右导数的定义（注意辨析）**

微分的定义

可导与可微的关系

3.2 求导法则

*导数四则运算的求导法则

**复合函数求导法则

**反函数求导法则

隐函数与由参数方程确定的函数求导

3.3 高阶导数

高阶导数的四则运算（Lebniz公式）

第四章 函数的导数

4.1 微分中值定理

极小（大）值与极值点

费马定理

**中值定理（Rolle, Cauchy, Lagrange）

广义Rolle定理，导函数介值定理

4.2 洛必达法则

**洛必达法则及应用条件

4.3 泰勒公式

**泰勒多项式与泰勒公式（Maclaurin公式）

**Peano余项与Lagrange余项

**间接泰勒展开

4.4 函数的增减性与极值问题

增减性判断法则

**驻点的定义与极值点判断法则

求函数的最值

二、易考点分析

选填题：

题型I：求极限（难度系数1-4不等，差别较大，数量较多）

思路1：代数变形

$$\text{极限}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

$$\text{极限}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(sin\sqrt{n+1}-sin\sqrt{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

应用场景：式子主体为相加/相减/指数；包含根式、三角等不易直接处理的项

大致思想：消灭相减的根式（平方差、立方差公式）；消灭底数中的x（取对数）；消灭相减的三角函数（和差化积）；尝试对化简后的式子运用夹逼

注意事项：不要算错数字；记准相关公式；发现计算量过大可结合其他方法化简

思路2：等价无穷小

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{lnx}}$$

已知 $f(x)$ 可导， $f(0)=f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-1}{\sin^2 x}$

应用场景：式子极为复杂；具有根式、三角、指数等项，但其形式一般较好解决；分式较多

大致思想：通过极限的四则运算，将原始拆解为数个分式极限的运算，利用等价（高阶）无穷小解决各分式极限。

注意事项：不可对加减前后的式子使用等价无穷小；常常搭配代数变形与洛必达使用

思路3：洛必达/泰勒展开

应用场景：所求极限为分式，复杂度适中；不想动脑子

大致思想：判断为0/0或无穷/无穷形极限后多次求导，或对分子分母进行泰勒展开

注意事项：对于给出的抽象函数慎用洛必达（导数极限不一定存在）

思路4：Stolz定理

$$\text{极限}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

应用场景：一般较为鲜明，分母中含有n或类似项

大致思想：经过适当变形，使得差分后所得结果适合计算

注意事项：一定要记得变形，某些题目不可直接使用Stolz

马甲1：判断连续性与间断点

常设情境：给出某一含x的极限，记作f(x)，求其连续性；判断间断点种类

解决方法：正常求各点左右极限；熟记间断点类型

马甲2：判断导数是否存在

常设情境：给出某一含参分段函数，其导数处处连续，求参数

解决方法：每段内正常求导；分段处使用导数定义求导；注意辨析左右导数与导数左右极限的区别

马甲3：求同（高）阶无穷小量参数

已知 $x\to0$ 时, $f(x)=x-\left(\dfrac{4}{3}+a\cos x\right)\sin x$ 为 x 的五阶无穷小量, 则 $a=$__________.

常设情境：给出某一含参函数，其为某函数同阶/高阶无穷小量，求参数

解题方法：直接除对应函数并求极限即可，一般使用等价无穷小与洛必达法则，有时也可使用泰勒展开直接求解

题型II：求导数/最值（难度系数1-3不等，数量相对少一点）

种类1：给出某函数，求在某区间内最值

求函数 $f(x)=|x(x^2-1)|$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值

解题方法：直接求导，求各极值点（驻点也可），并与边界值比对

注意事项：导数不要求错；看清求的是最大值还是最小值；注意判断隐藏间断点

种类2：求某函数的低阶导数

函数 $y=\mathrm{x}^{\sin(2x+1)}$（$x>0$）的微分 dy

解题方法：适当变形后直接求导即可，正确运用各项求导法则

注意事项：此类题型函数一般较为复杂，一定要细心，**不要忘了复合函数的链式法则**

种类3：求高阶导数

$$f(x)=xsinx, 求\ f^{100}(x)$$

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}, 求\ f^{100}(0)$$

解题方法：分解成两个函数的乘积，其中一个为x的多项式，利用Lebniz公式求解（一般适用于含三角、简单分式、指数函数的情况）；拆成两个简单函数的和，分别求高阶导（使用于分母可因式分解的情况）；或使用泰勒展开，取对应项系数（一般使用于求某点处高阶导数）

注意事项：仔细判断采用哪种解法

种类4：导数定义变形（常以求极限的马甲出现）

$$设\ f(x)\ 二阶可导, f''(x)=1, 求\ \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)+2f(-x)-3f(0)}{x^2}$$

解题方法：正常方法是通过变形将其变化为导数定义的标准形式，随后代入具体数值；或者使用洛必达、泰勒展开等手段，但不一定严谨；在选填中出现时，若f无特殊限制，可直接代入某多项式函数快速求解

注意事项：这种题目一般在选填中出现，且f限制不多，处于时间考虑直接代入并求解即可

种类5：反函数/隐函数/参数方程确定的函数求导，参见计算题部分

计算题：

题型I：反函数/隐函数/参数函数求导

已知函数 $y(x)$ 有参数形式 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解题方法：此类题目一般较为常规，但计算量可能较大，按规则正常求导即可（书上有例题）

注意事项：记得链式法则；不要抄错字母；耐心求导

题型II：写出某函数的泰勒展开/高阶导数

求函数 $f(x)=\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)$ 在 $x_0=-\sqrt{\pi}$ 处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式 (求出一般项), 并求 $f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$.

解题方法：与选填中类似题型一致，但需注意严谨性

注意事项：合理代数处理（换元），简化计算；理解无穷小的消去规则；记得泰勒公式系数与高阶导数之间的关系

题型III：给定某函数，求连续性、单调性、最值

曲线 $y=x^{-\lambda}, x>0$ ($\lambda>0$ 是参数) 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个三角形, 记切点横坐标为 a. 求切线方程和上述三角形的面积. 当 $a\to+\infty$ 时, 该三角形的面积变化趋势如何?

解题方法：直接求可能间断点极限、导数即可，注意判断驻点/极值点属性

注意事项：函数可能不会直接给出，求解函数时注意不要算错；求最值时注意判断边界值/间断点处极限

题型IV：求极限

$$\text{计算} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x}{x^3}.$$

解题方法：与选填基本类似，但需要注意严谨性。标答中可能较多采用泰勒展开/等价无穷小代换，必要情况下可以考虑洛必达法则；有时可能使用放缩，使用极限定义证明

注意事项：一定注意严谨性；大题里的求极限一般不会较为基础，尽量尝试各种技巧；记好极限定义

证明题

题型I：中值定理相关

解题常用手段：各中值定理；介值定理；泰勒展开lagrange余项

注意事项：合理寻找目标函数、相等的量，利用需证明结论合理猜测

题型II：极限相关

解题常用手段：绝对值不等式；放缩

注意事项：难度一般极高，合理放弃；注意放缩松紧度，太松会放过头，太紧证不出来

题型III：导数相关不等式

解题常用手段：导数判断单调性

注意事项：难度一般较低，可以大胆尝试，注意判断驻点与极值点属性

三、压轴题讲评

讲评优先级沿年份递减，没讲完的题目答案会发到群里

2018

1. (*10* 分) 设 $a_1=0$, 且对一切 $n\geq 1$ 均有 $a_{n+1}=\dfrac{1+2a_n}{1+a_n}$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 并求该极限.

2. (*5* 分) 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f(1)>0$, 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在 (为有限实数), 且严格小于 0. 求证: 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

2019

17.（8 分） 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 分别在 (a,c), (c,b) 上可导，其中 $c\in(a,b)$，求证：存在 $\xi\in(a,c)\cup(c,b)$，使得 $|f(b)-f(a)|\le|f'(\xi)||b-a|$。

求证：存在 $\xi\in(a,c)\cup(c,b)$，使得 $|f(b)-f(a)|\le|f'(\xi)||b-a|$。

18.（5 分） 设函数 f 在 R 上有定义，在 $(-1,1)$ 内有界，且存在 $a>0$, $b>1$，使得 $f(ax)=bf(x), \forall x\in R$。求证：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$。

2021

16.(1) 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛

(2) 设 $y_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

17.(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(x_0+\frac{k}{n^2}\right)-nf(x_0)$,

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{f'(x_0)}{2}$

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

四、复习建议

1. 看书

复习书上各类定义，尽量能够默写；熟悉书上定理的使用条件与大致证明思想；查看知识点是否有缺漏；从例题中学习书写格式与主流做题方法

2. 复习作业

复习老师留过的作业，根据错过的题判定薄弱点，强化训练；重做难题；根据参考答案判断解题常用思路与手段，同时规范推理证明

祝各位同学考试顺利！