数学分析（1）期中小班辅导讲义

致理-数 41 张溢致

2025 年 10 月 25 日

1 重点

1.1 实数系统

1. 实数体系满足：(1) 加法公理;(2) 乘法公理;(3) 序公理;(4) 完备性公理.

2. 复习实数完备性的几种等价表述，建议熟悉聚点定理和柯西收敛准则的证明方式。

1. **确界原理**任何非空且有上界的实数集，必有唯一的上确界；任何非空且有下界的实数集，必有唯一的下确界。

2. **单调有界定理**若数列单调递增且有上界，则该数列必有极限；若数列单调递减且有下界，则该数列必有极限。

3. **区间套定理**设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足两个条件：

   - 区间依次包含：$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$
   - 区间长度趋近于 0：$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

   则存在唯一的实数 ξ，使得 $\xi \in [a_n, b_n]$ 对所有 n 成立，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$。

4. **有限覆盖定理**若开区间集 S 能覆盖闭区间 $[a, b]$（即 $[a, b] \subseteq \bigcup_{I\in S} I$），则必能从 S 中选出有限个开区间，它们同样能覆盖 $[a, b]$。

5. **（Weierstrass）聚点定理**任何有界的无限实数集，至少存在一个聚点（即存在一个点，其任意邻域内都包含该集合的无限多个点）。

6. **柯西收敛准则**数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $m, n > N$ 时，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$。

1.2 数列

1. 数列极限的定义：

设 $\{a_n\}$ 为一数列，若存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，不等式

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

都成立，则称常数 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，或称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A。

记作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{或} \quad a_n \to A \quad (n \to \infty)$$

2. 数列极限的四则运算，收敛数列的子列必收敛，夹逼原理。

3. 常用的一些判定方法：

（1）比值判别法. 设 $a_n > 0, n = 1, 2, 3, \ldots$. 则下面极限等式

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{可以为正无穷})$$

成立的一个充分条件是右端极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在.

(2) Stolz 定理 ($\frac{*}{\infty}$ 型). 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为两个数列, 其中 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格单调增加且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. 则下面极限等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \quad (\text{可以为}\infty \text{ 或 } -\infty)$$

成立的一个充分条件是右端极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ 存在.

（3）数列的极限存在当且仅当它的上下极限都存在且相等。

（4）夹逼原理

（5）柯西收敛准则

3. 级数的定义，绝对收敛的定义，双重级数的三角换序（cdg 的同学可以忽略这部分）

4. 级数收敛的判定方法：

（1）部分同数列

（2）【Dirichlet 判别法】设形式级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界：

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le C, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

又设
$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots \geq 0; \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$
则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

（3）【达朗贝尔比值判别法】设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足通项非零且比值极限存在，即
$$a_n \neq 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ \alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$
则当 $\alpha < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛；当 $\alpha > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；当 $\alpha = 1$ 时，无法判别：收敛和发散都有可能.

（4）【Cauchy 根式判别法】给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 令
$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}. \quad \text{（上极限）}$$
若 $\alpha < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 若 $\alpha > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 若 $\alpha = 1$，则无法判别：收敛和发散都有可能.

1.3 函数

(zwm 的同学忽略这部分)

1. 函数极限的定义，函数连续的定义，函数一致连续的定义：

【函数极限】设 x_0 是集合 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 的聚点，$f : E \to \mathbb{R}^m$ 是向量值函数，$A \in \mathbb{R}^m$ 为给定向量. 若对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 且 $x \in E$ 时，成立
$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$
则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限为 A，记作
$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}} f(x) = A.$$

【函数连续】给定函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 以及 $x_0 \in X$. 我们称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in U_X(x_0, \delta)$ 时 $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$, 也即当 $x \in X$ 且 $|x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 这里
$$U_X(x_0, \delta) := \{x \in X \mid |x - x_0| < \delta\},$$
$$U(f(x_0), \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R} \mid |y - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

【函数一致连续】称函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 在其定义域上是一致连续的, 如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x_1, x_2 \in X$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$ 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

2. 介值定理，最值定理。

3. 无穷小量的概念，一些基本函数的泰勒展开。

1.4 一些基本的不等式和极限

【几何平均 $\leq$ 算术平均】若 $a_k \geq 0, k = 1, 2, \ldots, n$，则

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

【Cauchy 不等式】设 $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n$，则

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

紧凑形式为:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

若 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 不全为零, 等号成立当且仅当存在常数 c 使得 $a_k = c b_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

【三角不等式】设 $a_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n$，则

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

紧凑形式为:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

若 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 不全为零，等号成立当且仅当存在常数 $c \geq 0$ 使得 $a_k = c b_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

1. $1 + x \leq e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. $\frac{x}{1+x} \leq \log(1 + x) \leq x, \quad x > -1.$

3. $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x, \quad x>-1,\ 0<\alpha\leq 1.$

4. $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x, \quad x>-1,\ \alpha\geq 1.$

5. $x-\frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}, \quad 0\leq x\leq 1.$

6. $1-\frac{x^2}{2!} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}, \quad -1\leq x\leq 1.$

7. $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$

2 技巧及易错点

2.1 ε 语言

例题：证明对任意的正数 α 以及自然数 n，存在正数 γ 使得 $\gamma^n=\alpha$。我们记此实数 γ 为 $\sqrt[n]{\alpha}$ 或者 $\alpha^{1/n}$。

2.2 对求和类极限的分段处理

例题：见模拟题

2.3 无穷小量错误消去

例题：

$$\lim_{x\to 0}\frac{tanx-sinx}{x^2ln(1+x)}$$

2.4 不要忘记等比级数求和

例题：见模拟题

3 模拟题

写在前面：这份题目大部分选自往年考试题，考察其实比较偏，但是难度应该是和考试比较接近的（偏简单）。主要内容都在求极限，收敛性上，主要是这部分内容比较好练，有套路。其它知识点的题没什么技巧和套路，考的也相对少一些，所以几乎没怎么选，但是这不代表考试不考。

3.1 陈大广老师版

一 (15 分) 叙述 $f(x)$ 在 x_0 处连续的定义，并证明定理:

设 $E\subset\mathbb{R}, f: E\to\mathbb{R}, x_0\in E$. 则 f 在点x_0连续 $\Longleftrightarrow$ 对任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ 都有 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

二.(30 分) 试计算下列极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{ln(n^2+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k})^n$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{1-cosx}$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\alpha}\log x,\ \alpha>0$$

三.(10 分) 设二元数列 $\{a_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 和非负数列 $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足

$$|a_{n,k}|\le M_k\quad\forall\ n,k\in\mathbb{N};\quad\sum_{k=1}^{\infty}M_k<\infty;\quad\lim_{n\to\infty}a_{n,k}=0\quad\forall\ k\in\mathbb{N}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}|=0.$$

四 (10 分) 设 $\alpha>0$，实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限，$\lim_{n\to\infty}x_n=A$。求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2^{\alpha-1}x_2+3^{\alpha-1}x_3+\cdots+n^{\alpha-1}x_n}{n^{\alpha}}=?$$

五 (10 分) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列, 满足 $x_1\ge 0, x_2\ge 0$,

$$0\le x_{n+1}\le\frac{x_n+x_{n-1}}{2},\ n=2,3,4,\ldots.$$

证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

六 (10 分) 若 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上有最小值.

七 (15 分) 证明不存在连续函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 使得

$$f(f(x)) = 1-x \quad \forall\, x\in[0,1].$$

3.2 邹文明老师版

一 (15 分) 设 $x_0\in[0,1]$ 为一个无理数. 证明存在闭区间套 $[r_n,R_n]\supset[r_{n+1},R_{n+1}]$, $n=1,2,3,\ldots$, 其中 r_n,R_n 都是有理数且 $\lim\limits_{n\to\infty}(R_n-r_n)=0$, 使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[r_n,R_n]=\{x_0\}$. 这里 $\{x_0\}$ 是单元素集.

二.(30 分) 试计算下列极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k})^n$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^m}$$

三.(10 分) 设二元数列 $\{a_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ 和非负数列 $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足

$$|a_{n,k}|\le M_k \quad \forall\, n,k\in\mathbb{N};\quad \sum_{k=1}^{\infty}M_k<\infty;\quad \lim_{n\to\infty}a_{n,k}=0 \quad \forall\, k\in\mathbb{N}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}|=0.$$

四 (10 分) 设 $\alpha>0$，实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限，$\lim_{n\to\infty}x_n=A$。求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2^{\alpha-1}x_2+3^{\alpha-1}x_3+\cdots+n^{\alpha-1}x_n}{n^{\alpha}}=?$$

五 (10 分) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实数列, 满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$,

$$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n-1}}{2},\ n = 2, 3, 4, \ldots.$$

证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

六 (15 分) 设 $0 < \theta < 2\pi$。证明级数

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n} e^{in\theta}$$

收敛. 这里 $i = \sqrt{-1}$。[提示: 当 $k \in \mathbb{N}$ 时 $e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k$ 并证明 $|e^{i\theta} - 1| = 2|\sin(\theta/2)|$.]

七 (10 分) 利用 Weierstrass 极限点定理（每个有界数列都有收敛子列）证明闭区间套原理。