

微积分A(2)期末复习讲座

期中考试前部分参见：[目 微积分A\(2\)期中复习讲座](#)

一、知识点总览

第三章：重积分

3.1 矩形域上二重积分

- 二重积分定义（分划）
- 矩形域上连续函数必然可积
- 零面积集（零测集）
- 矩形域间断点为零面积集的有界函数可积
- 可加性与保号性

3.2 一般有界集合上二重积分

- 定义（借助矩形域）
- 在边界零面积区域内间断点零面积的有界函数可积
- 可加性与保号性
- 二重积分的积分中值定理
- 面积定义

3.3 累次积分法

- 二重积分与单次积分的转换
- 上下界界定技巧
- 变量代换
 - 极坐标代换
- 对称性

3.4 三重积分

- 累次积分法
 - 分拆方法

- 变量代换
 - 柱坐标
 - 球坐标

3.5 重积分应用

- 曲面面积计算
 - $S = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv, E = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial u}, G = \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial r}{\partial v}, F = \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v}$
 - $S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$
- 质心计算
 - $\bar{x} = \frac{\iiint x \rho(x, y, z) dV}{\iiint \rho(x, y, z) dV}$
- 转动惯量计算
- 引力问题

第四章：曲线积分与曲面积分



约定简写式：

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, B = \frac{D(x, z)}{D(u, v)}, C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

4.1 曲线与曲面

- 定义
- 方向
 - 法向量
 - 曲线： $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial t}$
 - 曲面： $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial u} \times \frac{\partial(x, y, z)}{\partial v}$

4.2 第一类曲线积分

- 记号： $\int_L f(\mathbf{X}) dl$
- 性质
 - 可加性

- 线性性
- 保序性
- $\int_L f(x, y, z) dl = \int_\alpha^\beta f(x, y, z) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$

4.3 第一类曲面积分

- 记号: $\iint_S f(x, y, z) dS$
- $\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$

4.4 第二类曲线积分

- $\int_{L(A)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$
- 性质:
 - 方向性
 - 可加性
- $\int_{L(A)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_\alpha^\beta (X, Y, Z) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$

4.5 第二类曲面积分

- 记号: $\iint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$
 - $d\mathbf{S} = \mathbf{n}^\circ dS$
 - $\mathbf{n}^\circ = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$
 - $dy \wedge dz = \cos \alpha dS, dz \wedge dx = \cos \beta dS, dx \wedge dy = \cos \gamma dS,$
- 投影法

4.6 Green公式

- Green公式: $\iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^\circ dl$
 - ∂D 正方向为逆时针方向, $\mathbf{n}^\circ$ 为其单位外法向量
 - $\mathbf{n}^\circ = \frac{(dy, -dx)}{dl}$
 - 变形:
 - $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{V} dx dy = \oint_{\partial D} X dy - Y dx$
- 路径无关的第二类曲线积分

- 等价:
 - $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$
 - $\exists u, s.t. du = Xdx + Ydy$
- 全微分方程: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

4.7 Gauss公式与Stokes公式

- Gauss公式: $\iint_{\partial\Omega^+} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz$
 - $div \mathbf{V} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$
- Stokes公式: $\oint_{\partial S^+} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S rot \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$
 - $rot \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$
 - S^+ 与 ∂S^+ 方向满足右手螺旋法则

第五章：常数项级数

5.1 无穷级数收敛性

- 部分和
- 级数收敛
 - Cauchy准则: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, s.t. \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}_+, |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \epsilon$
 - 级数收敛, 则数列趋于0
 - 线性性

5.2 非负项级数收敛性

- 比较判敛法
 - 比大小
 - 求极限
- 积分判敛法
 - 级数敛散性与积分一致
 - 要求被积函数非负递减
 - 推论: 与 $\frac{1}{x^p}$ 对比
- 比率判敛法

- 无法处理 $\rho = 1$ 情况
 - 极限不存在时，可换用对应方向上下极限
- 根值判敛法
 - 与比率判敛法等价
 - 极限不存在时，可换用对应方向上下极限
- Raabe判敛法
 - $\exists \rho > 1, n$ 足够大时, $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) \geq \rho$ ，级数收敛
 - n 充分大时, $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) \leq 1$ ，级数收敛

5.3 任意项级数的收敛性

- 绝对收敛与条件收敛
- 交错项级数Lebniz定理：若 $\{u_n\}$ 递减且趋于0，则
 - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛且不大于 u_1
 - 截断误差 $|R_n| = |S - S_n| \leq u_{n+1}$
- Dirichlet判别法：若数列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 满足
 - $\{u_n\}$ 部分和有界
 - $\{v_n\}$ 单调趋于0
 - 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛
- Abel判别法：若数列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 满足
 - $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
 - $\{v_n\}$ 单调有界
 - 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛
- 级数的运算性质
 - 结合律：收敛级数可在不改变次序前提下将连续项合并成新项，新级数仍收敛
 - 若合并成新项的项同号，则新级数与原级数收敛于同一数
 - 交换律：绝对收敛级数具有交换律

5.4 无穷乘积

- 取对数后几乎等价于级数

第六章：函数项级数

6.1 函数项级数收敛性

- 收敛域
- 一致收敛
 - 一致收敛Cauchy准则
 - 一致性
- Dirichlet判别法与Abel判别法
 - 与常数项级数基本一致，但需将趋于0、有界等条件加上一致性

6.2 和函数性质

- 连续性：若一致收敛，且每项在 I 上连续，则和函数在 I 上连续
- 可积性：若一致收敛，且每项在 I 上连续（在闭区间上可减弱为可积），则和函数的积分为每一项积分后的和函数
 - 在有界闭区间上，项函数积分后的和函数一致收敛于和函数的积分
- 可微性：在闭区间上，若项函数连续可导，导数的和函数一致收敛，且存在区间内某点使得该点处级数收敛，则和函数一致收敛，且其导数等于项函数导数的和函数。

6.3 幂级数

- Abel定理：
 - $\{a_n x^n\}$ 在 x_0 有界，则级数在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内绝对收敛，且 $\forall r < |x_0|$ ，在 $[-r, r]$ 上一致收敛
 - 内闭一致收敛性
 - Abel第二定理：幂级数在收敛区间端点 R 处收敛，则 $\forall r: 0 < r < R$ ，级数在 $[-r, R]$ 上一致收敛
- 收敛域与收敛半径
- 和函数的相关性质
 - 一般不考
- Taylor级数与Maclaurin级数
- 和函数求解
 - 对比已知Taylor级数
 - 求导/积分

第七章：傅里叶级数

7.1 形式Fourier级数

- 内积空间
- Fourier级数与系数求解

7.2 Fourier级数的性质与收敛性

- Dini判别法(不考察)
- f 的形式Fourier级数在 x_0 收敛于 $\frac{1}{2}[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)]$
- 平方平均距离 (不考察)

二、往年题选讲

选填

考点1：求梯度、旋度、散度

$F = (x \ln(y+z) + y \ln(x+z) + z \ln(x+y))$, 求 $\operatorname{div}(F)(1, 1, 1)$

记 $\xi = (x, y, z)^T$ 为三维列向量, A 为三阶实数矩阵, 其特征值为 $2, 0, -3$, 则三维线性向量场 $A\xi$ 的散度为 $\operatorname{div} A\xi =$ _____.

Tips: 记好梯度、散度、旋度三个“度”的记号与定义

考点2：多重积分计算

积分 $\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx =$ _____.

累次积分 $\int_0^{\ln 3} dx \int_x^{\ln 3} \frac{e^y}{y} dy =$ _____。

三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \sqrt{|x|+y^2-\cos z+1} \sin(xy^2 z^3) dx dy dz =$ _____.

设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$ _____.

函数 $f(x) = x^2$ 在区域 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2\}$ 中的积分平均值

$$\frac{\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Tips: 善用交换积分次序、换元、对称性、几何意义等简化手法, 灵活判断

考点3: 曲线积分

曲线 $L: |x| + |y| = \sqrt{2}$ 的线密度为 $\mu(x, y) = 3 + x^2 - y^2$, 则曲线 L 的质量为

5. 如图, L^+ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上的一条 C^1 曲线, 以

$S(0, 0, -1)$ 为起点, 以 $N(0, 0, 1)$ 为终点. 则

$$\int_{L^+} (y^2 + z^2) dx + 2(z^2 + x^2) dy + 3(x^2 + y^2) dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$



设 $\lambda > 0$, 记 L_{λ}^+ 为圆周 $x^2 + y^2 = \lambda^2$, 逆时针为正向, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi \lambda^2} \left[\int_{L_{\lambda}^+} (\sin x + y + e^y) dx + (3x + x e^y) dy \right] = \underline{\hspace{2cm}}$$

设曲线 C 的参数表示为 $x = 2t, y = t, z = 2 - 2t, 0 \leq t \leq 1$, 则空间第一型线积分 $\int_C xy dl = \underline{\hspace{2cm}}.$

Tips: 善用Green公式, Stokes公式

考点4: 曲面积分

设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面

$$\Sigma: \begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ z = \theta, \end{cases}$$

取 Σ 朝上一侧为正向，则

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\Sigma^+} 2y dy \wedge dz - 2x dz \wedge dx + dx \wedge dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

设 $\mathbb{R}^3$ 中曲面

$$\Sigma: x^2 + y^2 - 2z = 0 \quad (0 \leq z \leq 8)$$

则

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dS = \underline{\hspace{2cm}}.$$

设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma} (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

圆柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ (z \geq 0)$ 和平面 $z = 0$ 所截部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

Tips：第一类曲面积分确定好被积分区域与曲面方程；第二类曲面积分确定好方向、善用Gauss公式

考点5：级数判敛

幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \ln n}$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

关于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}$ 的收敛性，下述正确的结论是_____。

A: 绝对收敛; B: 条件收敛; C: 发散。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^p}} - 1 \right)$ 收敛当且仅当参数 p 满足_____。

A) $p > \frac{1}{2}$

B) $p \geq 2$

C) $p \geq 1$

D) $p > 1$

已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ _____。

A) 不能确定

B) 绝对收敛

C) 条件收敛

D) 发散

关于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ，以下陈述中正确的是_____。

A) 对任意 $0 < \delta < 1$ ，该幂级数在任何区间 $[-1, 1 - \delta]$ 上一致收敛

B) 对任意 $0 < \delta < 1$ ，该幂级数在任何区间 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上一致收敛，但在区间 $[1 - \delta, 1)$ 和 $(-1, -1 + \delta)$ 上都不是一致收敛

C) 该幂级数在区间 $[-1, 1]$ 上一致收敛

D) 对任意 $0 < \delta < 1$ ，该幂级数在任何区间 $[-1 + \delta, 1)$ 上一致收敛，但在区间 $(-1, -1 + \delta]$ 上不是一致收敛的

Tips: 灵活切换根值、比值判别法; 善用等价无穷小; 涉及一致收敛记好书上性质, 实在不会不要恋战

考点6: 级数求和函数

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}$ 在 $(-1, 1)$ 的和函数

设幂级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数是微分方程的初值问题 $\begin{cases} xy'' = y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ 的解，则

$\frac{1}{a_3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

Tips: 使用求导、积分等手法消去含n的系数

考点7: Fourier级数

设 2π 周期函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x \in (-\pi, 0] \end{cases}$ 的形式 $Fourier$ 级数的和函数为 $S(x)$ ，则 $S(\pi) = \underline{\hspace{1cm}}.$

设 2π 周期函数在区间 $[-\pi, \pi]$ 的定义为 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (0, \pi] \\ 1, & x \in (-\pi, 0] \end{cases}$ ，设 $f(x)$ 的形式 $Fourier$ 级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ，则 $b_n = \underline{\hspace{1cm}}.$

Tips: 善用Dini定理求和函数值；求参数直接套公式即可

解答

考点1: 多重积分计算

设 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 2\}$ ，计算二重积分

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy .$$

设 D 为不等式组 $x > 0, 1 \leq xy \leq 3, x \leq 2y \leq 2x$ 确定的平面区域。求 $\iint_D x^2 dx dy$ 。

(12 分) 计算三重积分

$$J = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz,$$

其中 Ω 为两个球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 所围的有界闭区域。

Tips: 画图确定积分区域; 恰当决定积分次序

考点2: 曲面积分与曲线积分

2. (10 分) 计算曲面积分:

$$I = \iint_{S^+} \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

其中 S^+ 为曲面 $1 - \frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16}$ ($z \geq 0$) 的上侧。

设 S^+ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$, 正向朝外。计算第二型曲面积分

$$\iint_{S^+} xy^2 \, dy \wedge dz + yz^2 \, dz \wedge dx + xz^2 \, dx \wedge dy.$$

(10 分) 设空间向量场 $\vec{F} = (x^3 - x, y^3 - y, z^3 - z)$ 。试确定一个空间有界光滑的封闭曲面 S^+ , 其外法向为正, 使得第二型面积分

$$J = \iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

的值最小, 并求出这个最小值。

设 S 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 包含在圆柱面 $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ 内的部分, 求 $\iint_S z^3 \, dS$ 。

(10 分) 设平面定向曲线 C^+ 为正弦曲线段 $y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 起点为 $(-\pi, 0)$, 终点为 $(\pi, 0)$ 。求第二型线积分

$$J = \int_{C^+} (e^{-x^2} \sin^3 x + \sin y) dx + (x \cos y - y^3) dy.$$

(10 分) 计算线积分

$$\oint_{C^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

其中定向曲线 C^+ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线, 且从 x 轴正向朝原点方向看去, C^+ 的正向是逆时针的。

Tips: 第二类曲面积分几乎一定需要使用 Gauss 定理, 注意正方向、被积曲面是否闭合; 第一类曲面积分注意被积区域。曲线积分同理, 善用 Stokes 定理与 Green 公式。

考点3: 级数

(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)x^n$ 的 (i) 收敛半径, (ii) 收敛域, 以及 (iii) 和函数。

(1) 求微分方程 $\begin{cases} (1-x^2)S'' = xS' \\ S(0) = 0, S'(0) = 1 \end{cases}$ 的幂级数解 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 并求这个幂级数的收敛半径;

(2) 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的值。

Tips: 纯纯送分题, 和选题做法相同。注意考虑边界是否收敛。

考点4: Fourier 级数

(10 分) 设 $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$ 。

(i) 求函数 $f(x)$ 以 2 为周期的 Fourier 级数;

(ii) 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。

5. 已知 2π 周期函数 f 在区间 $(-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi; \\ -1, & -\pi < x < 0. \end{cases}$

(1) 求 f 的傅里叶级数;

(2) 利用 Parseval 等式和 (1) 中的级数, 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

(3) 求积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} dx$$

的值。

• Parseval 等式:

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 其傅里叶系数为 a_n, b_n , 则 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

Tips: 很唬人的送分题, 记好含三角函数积分怎么算, 求具体级数解时代入即可, 使用Dini定理。

证明

考点1: 级数

(5 分) 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 由以下等式确定:

$$b_n = \ln(e^{a_n} - a_n), \quad \forall n \geq 1.$$

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛.

(8 分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} \sin n$$

是否收敛，并说明理由。

设 $a_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$

(I) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

(II) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例；

(III) 若 $\{a_n\}$ 单调，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛，此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛？若收敛，证明之；若不收敛，举反例。

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，即级数一般项 $a_n > 0$ ，再记 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛。

Tips: 记好D判别法，A判别法的条件，不要记混；大胆放缩；善用等价无穷小

考点2：多重积分

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，其边界面 $\partial\Omega$ 为光滑正则曲面。

(1) 设 $f, g \in C^{(2)}$ ，求证：

$$\iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} f \Delta g dx dy dz + \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx dy dz$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的外法向量，算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

(II) 函数 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z) \in C^{(2)}(\Omega)$

若 u 为调和函数 ($\Delta u = 0$)，且当 $(x, y, z) \in \partial\Omega$ 时， $u(x, y, z) - v(x, y, z) = 0$ ，求证：

$$\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \leq$$

$$\iiint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

Tips: 考的比较少, 善用上一问结论。大概率需要使用Guass定理