# 微积分A(2)期中复习讲座

## 一、知识点总览

### 第一章：多元函数及微分

#### 1.1 n维Euclid空间$\mathbb{R}^n$

- 点与向量的表示
- 三角不等式
- 邻域与去心邻域 $B(X_0,\delta), B^o(X_0,\delta)$
- 内点/边界 开集/闭集 内部/闭包
- 连通性
- 收敛点列
  - 定义（与一维情况类似）
  - 分量数列极限
  - Cauchy列
  - 点列极限与闭集
- Weierstrass定理：有界点列必有收敛子列
- 闭集套定理
- 有限覆盖定理（有界闭集紧性）

#### 1.2 多元函数

- 多元（向量值）函数定义

#### 1.3 多元函数的极限与连续

- 向量值函数极限
- 极限运算法则
- Cauchy准则
- 数列极限与函数极限的互换
- 累次极限与多元极限
- 多元函数连续

- 连续函数空间封闭性
- 最值定理：闭集上连续函数存在最值
- 介值定理
- 无穷小量（大O，小o，k阶无穷小）

### 1.4 微分与偏导

- 可微性与全微分
- 可微与连续
- 全微分运算
- 偏导数与全微分
- 偏导数连续则可微
- 方向导数
- 梯度
- 高阶偏导数

### 1.5 向量值函数

- Jacobi矩阵
- 复合函数微分

### 1.6 隐函数与反函数

- 隐函数
- 隐函数导数

### 1.7 曲面与曲线

- 法向量与切平面
- 切线

### 1.8 Taylor公式

- Hesse矩阵
- Peano余项与Lagrange余项

### 1.9 极值与最值

- 极值与驻点
- 极值判断方法

- 条件机制：Lagrange乘子法

## 第二章：含参积分

### 2.1 预备知识

- 一致连续
- 广义积分的一致收敛
- 比较判别法
- Dirichlet判别法
- Abel判别法

### 2.2 含参积分性质

- 连续性
- 可微性
- 积分换序

### 2.3 广义含参积分

- 连续性
- 可微性
- 可积性

# 二、往年题选讲

## 选填

### 考点1：多元极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{x^2+2}{x^2+y^2}}=\underline{\qquad\qquad}。$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=\underline{\qquad\qquad}。$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2+y^4}=\underline{\qquad\qquad}.$$

Tips: 让求解的极限必然是存在的

函数 $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{-(x^2-y)}$ 沿任意射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha(0\le t<+\infty)$ 的极限

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=$__________；

## 考点2：偏导数

若 $z=y^x$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,\mathrm{e})=$______________。

设 $f(x,y)=e^{x+y^2\sin x}+(x^3-1)\tan\frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)=$ __________.

设函数 $z=z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)=x$，$z(x,0)=x$，, $z(0,y)=y^2$. 则 $z(2,1)=$____________。

Tips：求偏导时，其他参数视为常数

## 考点3：Jacobi矩阵及应用

设 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$v=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 Jacobi 矩阵的行列式 $\dfrac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}=$____________

已知 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^v+u^3 \\ y=\mathrm{e}^u-v^3 \end{cases}$ 将点 $(u_0,v_0)=(1,0)$ 映为 $(x_0,y_0)=(2,\mathrm{e})$, 则其逆映射 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 在点

$(x_0,y_0)=(2,\mathrm{e})$ 处的 Jacobi 矩阵的行列式 $\det\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\Big|_{(x,y)=(2,\mathrm{e})}=$____________。

从 $(u_0,v_0)=(2,1)$ 的邻域到 $(x_0,y_0)=(3,4)$ 的邻域中，向量值函数 $\begin{cases} x=u+v \\ y=u^2v^2 \end{cases}$ 有可微的逆向量值函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(3,4)=$____________。

设函数 $f(u,v)$ 连续可微，$z=f(xy,x-y)$，则 $\mathrm{d}z=$____________________。

Tips：记不清该乘还是该除，就把完整式子写出来

## 考点4：曲面与曲线

曲线$\begin{cases} x = e^t \\ y = 2\sin t + \cos t \\ z = 1 + e^{3t} \end{cases}$在 $t = 0$ 所对应的点处的切线方程为________________________。

6. 写出曲面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$ 在点 $(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ 处的一个单位法向

量：_______________。

曲面 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(1, 1, \frac{\pi}{4})$ 处的法线记作 $\ell$. 若点 $(2, 0, a) \in \ell$, 则 $a =$ ___________.

Tips: 老老实实背公式

## 考点5：隐函数求导

已知 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - z - 7 = 0$ 确定的一个隐函数，则 $z = z(x, y)$ 的驻

点 $(x_0, y_0) =$ _______________。

5. 方程 $\sin(x+y) + ze^z - ye^x = 0$ 在 $(x, y) = (0, 0)$ 的一个邻域中确定了唯一的隐函数

$z = z(x, y)$. 则 $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) =$ _______________。

8. 图中红色曲线是一个 $C^\infty$ 函数 $f(x, y)$ 的一条等高线。

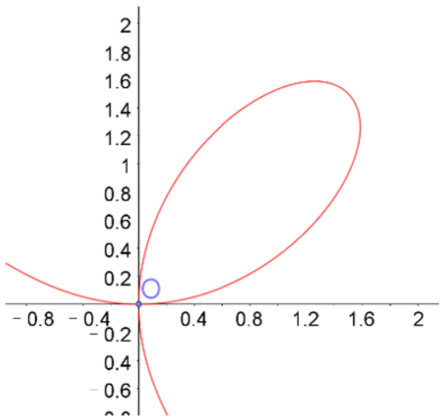
则 $f$ 在原点 $O$ 处的梯度向量是

(A) 零向量

(B) 沿 $x$ 轴的一个非零向量

(C) 沿 $y$ 轴的一个非零向量

(D) 沿直线 $y = x$ 的一个非零向量




Tips: 书上公式与直接求微分在所有意义上等价

## 考点6：含参积分

设 $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2 + xt} dt$, 则 $f'(0) =$ ____________________。

$$\lim_{y\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xy}}{1+x^2}dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}。$$

Tips: 牢记含参积分公式，与书上常见手法

**考点7：一致收敛**

11\. 记含参广义积分 $f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-tx}dt$， $x>0$. 则

(A) $f(x)$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛；

(B) 对所有 $\delta_0>0$， $f(x)$ 关于 $x\in(\delta_0,+\infty)$ 一致收敛；

(C) 对所有 $\delta_0>0$， $f(x)$ 关于 $x\in(0,\delta_0)$ 一致收敛；

(D) 以上选项都不对

Tips: 牢记一致收敛定义；大多数情况下比较判别法最好用

## 解答

**考点1：多元函数连续、微分与偏导**

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，回答以下问题：

(Ⅰ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否连续，说明理由；

(Ⅱ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $u=(a,b)$ ( $a^2+b^2=1$ ) 的方向导数是否存在？若存在，求出这个方向导数，若不存在，说明理由；

(III) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否可微，若可微，求出这个微分，若不可微，说明理由。

11.（10 分） 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 回答以下问题，并说明理由。

（Ⅰ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

（Ⅱ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否存在偏导数？若存在，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$；

（Ⅲ）函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？若可微，求在点 $(0,0)$ 处的全微分；

（Ⅳ）函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

Tips: 首先尝试用一个 $\rho$ 的函数控制原函数；控制成功，则求该函数极限；控制失败，寻找不存在极限/极限不一致路径

**考点2：多元函数最值**

（10 分）请用 Lagrange 乘子法求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$ 在曲线 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(x+y)$ 的极值和值域。

Tips：先求驻点，再求边界；Hesse矩阵不必要

**考点3：含参积分求解**

设实数 $a\geq 0$，求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x$。

设 $I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}x$，证明：$I(y)=\mathrm{e}^{-y^2}\int_0^{y}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$。

Tips：80%的问题可以通过对参数求导解决，剩下的变形后求导

### 考点4：隐函数求导

已知方程 $2z-\mathrm{e}^z+1+\int_y^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t=0$ 在 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$。求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$。

Tips：与小题做法完全相同

## 证明

### 考点1：极值与最值

15. （6 分）设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是非空有界闭区域，$f$ 是 $D$ 上的连续函数。证明：至多只有一个函数 $u(x,y)$ 在 $D$ 上连续，在 $D$ 的内部 $\mathring{D}$ 为 $\mathrm{C}^{(2)}$ 类，且满足

$$\begin{cases} u''_{xx}+u''_{yy}=\mathrm{e}^u, & (x,y)\in\mathring{D} \\ u=f, & (x,y)\in\partial D \end{cases}$$

17. (i) (3分) 记 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$, 则平面曲线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)=0\}$ 是熟知的双纽线, 具有无穷大符号 $\infty$ 的形状. 求函数 $F(x,y)$ 之驻点(即临界点)的个数;
(ii) (5分) 对一般在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微的函数 $G(x,y)$, 假设曲线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,G(x,y)=0\}$ 具有无穷大符号 $\infty$ 的形状. 问函数 $G(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上至少有多少个驻点? 并证明你的结论.

Tips：连续函数在闭区间上存在最值，是很强的结论；活用Hesse矩阵

### 考点2：含参积分的若干性质

21. （7 分）设 $f\in\mathrm{C}^{(0)}[0,1]$ 且 $f(x)>0$，$\alpha>0$。根据参数 $\alpha$ 的不同值，研究函数 $g(y)=\int_0^1\frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$（$y\in[0,+\infty)$）的连续性，并证明你的结论。

16. （**15** 分）已知 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}\mathrm{d}x, t \in [0,+\infty).$

(1) 证明：$f(t,x) = \begin{cases} \frac{1-\mathrm{e}^{-tx^2}}{x^2}, & x \neq 0, t \in \mathbb{R} \\ t, & x = 0, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

(2) 证明 $I(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续 。

(3) 证明 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导并计算 $I'(t)$.

(4) 求 $I(t), t \in [0,+\infty)$.

Tips：记好含参（广义）积分连续的判定法

## 考点3：隐函数

19. 设 $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是 $C^1$ 映射，满足

(a) 对任意 $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m$， $F$ 在点 $\mathbf{x}$ 处的 Jacobi 矩阵都是可逆矩阵；

(b) 当 $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$ 时， $\|F(\mathbf{x})\| \to +\infty$ .

证明：

(1) $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是满射，即对任意 $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$， $F^{-1}\{\mathbf{y}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \middle| F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$ 是非空集合；

(2) 对任意 $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$， $F^{-1}\{\mathbf{y}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \middle| F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$ 是有限集合。

Tips：活用隐函数定理

## 考点4：连续性证明

17. （**5** 分）已知函数 $f(x,y)$ 对每个变量 $x,y$ 分别连续；且对每个固定的 $x$, 函数 $f(x,y)$ 对变量 $y$ 单调。求证： $f(x,y)$ 作为二元函数是连续函数。

16. （5 分）设 $K$ 是 $\mathbf{R}^k$ 的有界闭子集，函数 $f:\mathbf{R}^m \times K \to \mathbf{R}$ 连续，记 $g(\mathbf{x}) = \min\limits_{\mathbf{y}\in K} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$。证明 $g:\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ 连续。

Tips：尽量往定义上凑；函数极限与点列极限间关系