微积分A1期末知识梳理

晏平

2023.12.30

* 导数的应用
* 不定积分与定积分
* 广义积分
* ODE

第四章 导数的应用

§4. 函数的增减与极值

设f可导，则

- $f\uparrow \Leftrightarrow f'(x)\geq 0$;
- f严格$\uparrow \Leftrightarrow f'(x)\geq 0$，且在任意$(c,d)$上$f'(x)$不恒为0.
- f在x_0处取到极值，则$f'(x_0)=0$.

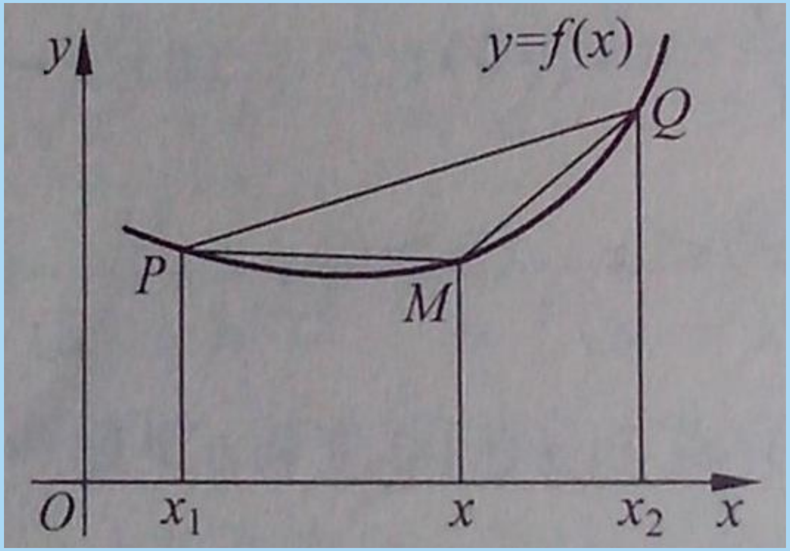
§ 5. 函数的凸凹与拐点

- f 为I上的下凸函数(定义与几何意义)

Def 1. $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$

$$\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

$$\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda\in[0,1].$$



Def 2. $f(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n)\le\lambda_1 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n),$

$$\forall x_1,\cdots,x_n\in I,\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\ge 0.$$

- 以下各命题等价：(1) f 为 I 上的下凸函数;

(2) $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $x \in (x_1, x_2)$, 有

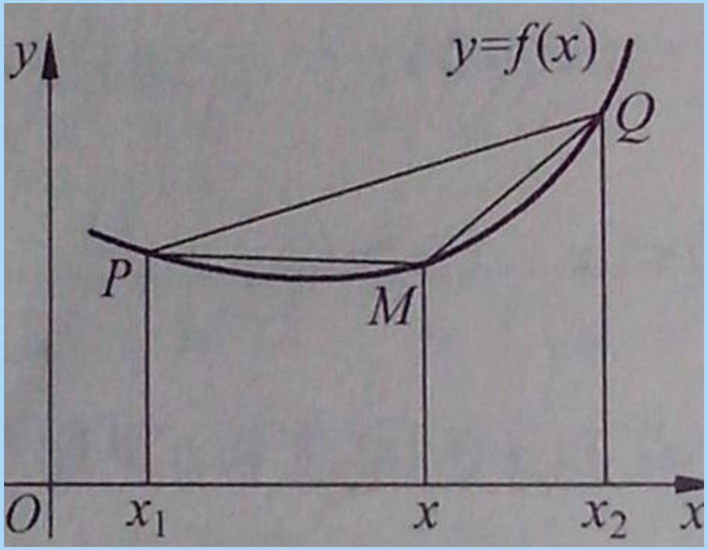
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1};$$

(3) $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $x \in (x_1, x_2)$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x};$$

(4) $\forall x_1, x_2 \in I$ 及 $x \in (x_1, x_2)$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$



convex function

- $f \in C[a,b]$, f在(a,b)上可导,则

  f在$[a,b]$下凸$\Leftrightarrow$ f'在(a,b)单调递增.

- $f \in C[a,b]$, f在(a,b)上二阶可导,则

  f在$[a,b]$下凸$\Leftrightarrow$在(a,b)中$f''(x) \geq 0$.

- 拐点的定义

- $(x_0, f(x_0))$为$y = f(x)$的拐点, $f''(x_0)$存在,则$f''(x_0) = 0$.

- 函数作图

函数作图关键因素:

(1)定义域;　　(2)奇偶性、周期性、对称性

(3)渐近线　　(4)极值点与增减区间

(5)拐点与凸凹性

(6)特殊点, 如$f(x_0)=0$, 极值点, 拐点的函数值

Def.(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$,则称$x=x_0$为$y=f(x)$的一条竖直渐近线;

(2)若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$, 则称 $y=a$ 为 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线;

(3)若 $\exists a\neq 0$ 及 b, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax-b)=0,$$

则称 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

Remark. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax-b\right)=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b.$$

第五章 Riemann(定)积分

§ 1.Riemann积分定义

Def. 设f为有界闭区间$[a,b]$上的有界函数,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{I}$:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$|T|<\delta$时,无论$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$如何取,都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-\mathrm{I}\right|<\varepsilon.$$

Remark. 有界闭区间上的无界函数不是Riemann可积的.

Remark. 修改有限个点处的函数值,不改变有界闭区间上函数的Riemann可积性及积分值.

Thm. $f\in C[a,b]\Rightarrow f\in R[a,b].$

Thm. f在$[a,b]$上单调$\Rightarrow f\in R[a,b].$

§ 2.Riemann积分的性质

- $\int_a^b\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$
- $a<b<c$,则$f\in R[a,c]\Leftrightarrow f\in R[a,b]\ \&\ f\in R[b,c].$

  此时$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$
- $f(x)\le g(x)\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

- $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$, 且 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$
- $f, g \in R[a,b] \Rightarrow fg \in R[a,b].$
- Cauchy不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

- 积分第一中值定理

$f \in C[a,b], g \in R[a,b]$, g不变号, 则$\exists \xi \in [a,b]$, $s.t.$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

§ 3.微积分基本定理—Newton-Leibniz公式

•Thm.(微积分基本定理) $f \in R[a,b], F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则

(1)$F \in C[a,b]$;

(2)若f在$x_0 \in [a,b]$连续,则F在x_0可导,且$F'(x_0)=f(x_0)$;

(3)若$f \in C[a,b]$,则F是f在$[a,b]$上的一个原函数. 任给f的一个原函数G,都有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b)-G(a) \triangleq G(x)\Big|_a^b. \text{ (Newton-Leibniz)}$$

Remark. $F' = f \in R[a,b]$,则$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(x)\Big|_a^b$.

• Thm. f连续, f连续, u, v可导, 则

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

$$\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x).$$

• $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

不定积分不单考，但其计算方法在定积分及广义积分中可以借用。

§ 4.不定积分换元法与分部积分

- 第一换元法(凑微分法)

$$\int f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f'(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = f(\varphi(x)) + C$$

- 第二换元法

$$\int f'(u)\mathrm{d}u \overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=\!=} \int f'(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$= g(x) + C = g(\varphi^{-1}(u)) + C$$

- 分部积分法 $\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$

§ 5.有理函数与三角有理函数的不定积分

1. 有理函数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ $(p,q$为多项式$)$, 裂项再分别积分

2.三角有理式$R(\sin x,\cos x)$:$\sin x,\cos x$有限次四则运算

3.可化为有理式的简单无理式

1) $\int R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})\mathrm{d}x \quad (ad-bc\neq 0)$ 令$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

2) $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$

- $\int R(x,\sqrt{(x+p)^2+q^2})\mathrm{d}x$, 令 $x+p=q\tan t, |t|<\dfrac{\pi}{2}$
- $\int R(x,\sqrt{(x+p)^2-q^2})\mathrm{d}x$

  令 $x+p=q\sec t, t\in[0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi]$
- $\int R(x,\sqrt{q^2-(x+p)^2})\mathrm{d}x$, 令 $x+p=q\sin t, |t|<\dfrac{\pi}{2}$

§ 6.定积分的计算

- Newton-Leibniz公式:

$$F' \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{b}.$$

- 换元法: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$

$$f \in C[a,b], x = \varphi(t) \in C^1[\alpha,\beta], \alpha \neq \beta,$$

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, a \le \varphi(t) \le b.$$

Remark.不要求$x = \varphi(t)$可逆.

- 分部积分：$u',v'\in R[a,b]$,则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

简记为 $\displaystyle\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$

§ 7.定积分的应用及微元法

- 利用定积分求数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

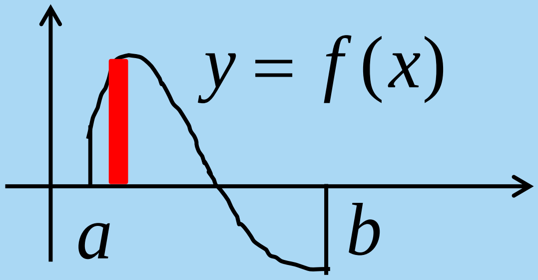
将c_n写成函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的Riemann和:

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

- 平面区域的面积

1)函数$\Gamma: y = f(x), x \in [a,b]$与$x$轴所围面积



$$\mathrm{d}S = |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Remark.若曲线Γ：$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$,则

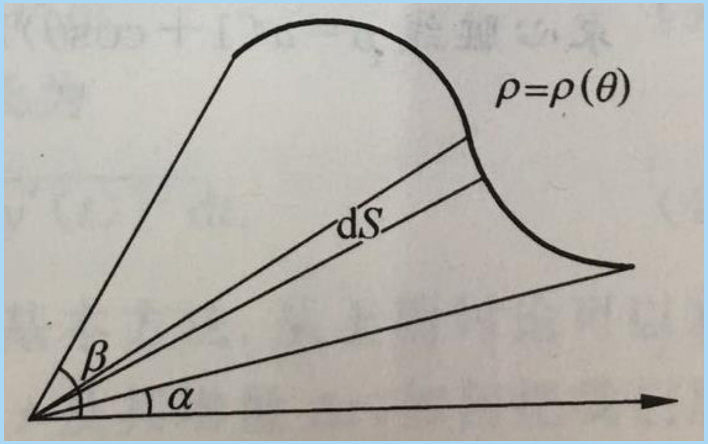
$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_\alpha^\beta |y(t)|\,x'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

2) 曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x), x\in[a,b]$ 所围面积.

$$S=\int_a^b\left|f_1(x)-f_2(x)\right|\mathrm{d}x.$$

3) $\rho=\rho(\theta), \theta\in[\alpha,\beta]$.

（注意ρ和θ的几何意义！）



$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

- 曲线的弧长

1)空间曲线$L: x=x(t), y=y(t), z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$,

$x(t), y(t), z(t)\in C^1[\alpha,\beta]$.

弧长微元$\mathrm{d}l=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

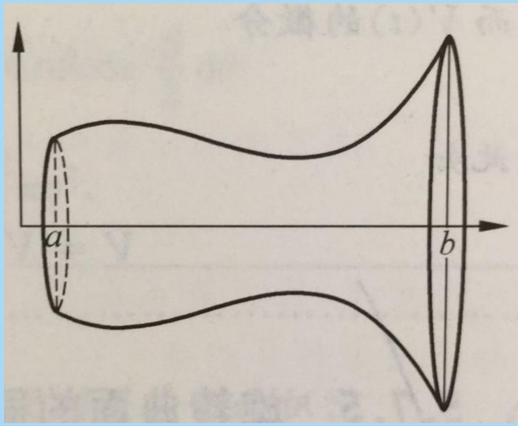
$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

2)平面曲线$L: y=f(x), a\le x\le b, f(x)\in C^1[a,b]$.

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

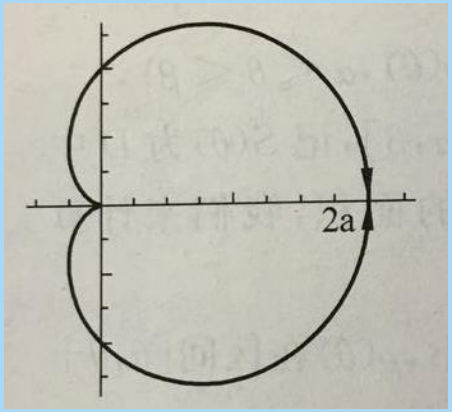
旋转体的体积

(1) 曲线Γ: $y=f(x), a\le x\le b$, 绕 x轴旋转得旋转体Ω. 求$V(\Omega)$.



$$\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\mathrm{d}x,\quad V(\Omega)=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

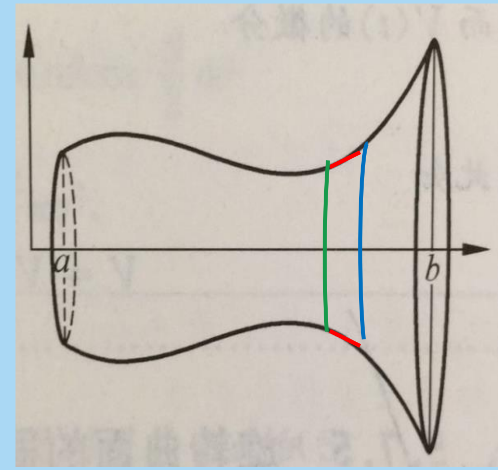
(2) 曲线Γ: $x=x(t), y=y(t), \alpha\le t\le\beta, x(t), y(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, 绕 x 轴旋转得旋转体Ω.



$$V(\Omega)=\pi\left|\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)\mathrm{d}t\right|.$$

Remark. 若Γ关于x轴对称, 则对上半条曲线所对应的参数区间积分.

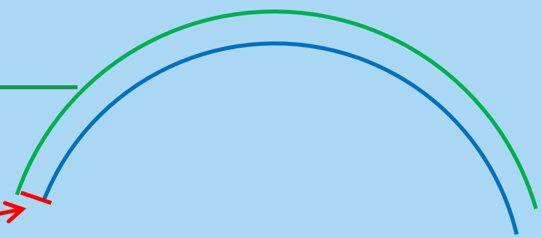
• 旋转面的面积



(1) 曲线$\Gamma: y = f(x), a \le x \le b, f \in C^1[a,b]$，
绕 x 轴旋转得旋转面面积

平展 $[x, x+\Delta x]$ 对应的旋转面：

$2\pi|f(x)|$



$\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

旋转面面积微元 $\mathrm{d}S = 2\pi|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

(2)曲线$\Gamma: x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta, x(t), y(t) \in C^1[a,b]$,绕$x$轴旋转得旋转面$\Sigma$的面积$S(\Sigma)$.

$[t, t+\Delta t]$对应段弧σ的弧长为 $\mathrm{d}l = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$

σ绕x轴旋转所得曲面面积微元为

$$\mathrm{d}S = 2\pi |y(t)| \mathrm{d}l = 2\pi |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Remark.若Γ关于x轴对称,则对上半条曲线所对应的参数区间积分.

第六章 广义积分

§1.广义Riemann积分的概念

- $$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$
- $$\int_a^{b(\text{瑕点})} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\delta\to0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$$
- $$\int_{a(\text{瑕点})}^{b(\text{瑕点})} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x, c\in(a,b).$$
- $$\int_{a(\text{瑕点})}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, c\in(a,+\infty).$$

$$F(x) \triangleq \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

- $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x).$
- $\int_a^{b(\text{瑕点})} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim\limits_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to b^-} F(x).$
- 广义积分的Newton-Leibnitz公式、变量替换、分部积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow p>1; \qquad \int_0^1\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow p<1.$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow p>1.$$

§2.广义积分判敛法

- *Def*.广义积分的绝对收敛与条件收敛
- Cauchy收敛原理

$$p \le 0 \text{ 时}, \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} \mathrm{d}x \text{发散} \Leftarrow \left| \int_{2k\pi-\pi/4}^{2k\pi+\pi/4} \frac{\cos x}{x^p} \mathrm{d}x \right| \ge \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

- 比较判别法(一般形式、极限形式)只能判断广义积分是否绝对收敛;常用标尺:$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x$
- Dirichlet判别法
- Abel判别法

第七章 ODE

1.理论部分:

- 解的存在唯一性定理

Thm. 设函数$a_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$和$f(t)$都在区间I上连续,$t_0\in I$,则对任意实数$\xi_k(k=0,1,\cdots,n-1)$,定解问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=\xi_0, x'(t_0)=\xi_1,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1} \end{cases}$$

在区间I上存在唯一解$x(t)$.

Thm. (Cauchy-Picard)设$f(x,y)$在矩形

$$D=\{(x,y):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$$

中连续,并且关于变元y满足Lipschitz条件,即存在正数L,使得对任意$(x,y_1)\in D$,及$(x,y_2)\in D$,都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,$$

则存在正数h,使得一阶常微分方程的初值问题

$$y'(x)=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

在$[x_0-h,x_0+h]$上存在唯一的解. 其中,

$$h=\min\{a,b/M\},|f(x,y)|\le M,\forall(x,y)\in D.$$

Remark. 几何意义：解曲线不相交.

- 线性ODE解的结构

Thm. $a_1(t), a_2(t), \cdots, a_n(t), f(t) \in C(I), t_0 \in I.$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0$$

有解$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 则

(1)$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$在$I$上线性相关$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t) = 0, \forall t \in I.$$

(2)$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$在$I$上线性无关$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \mathrm{W}[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t) \neq 0, \forall t \in I.$$

Thm. n 阶齐次线性常微分方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad \text{(I)}$$

的解集合为 n 维线性空间.

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad \text{(II)}$$

的通解可表示为

$$x(t)=\varphi(t)+\varphi_0(t),$$

其中 $\varphi(t)$ 是 (I) 的通解, $\varphi_0(t)$ 是(II)的特解.

2.计算部分：

- 一阶线性OED：$y' + p(x)y = q(x)$.

方程两边同乘$e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$,得：$\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} \right)' = q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$.

在$[x_0, x]$上积分,得：$y(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t} - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$,

即 $y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} -p(t)\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{s}^{x} -p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$.

Remark.一阶线性ODE也可以用常数变易法求解。

不建议背公式！

清華大學

- 一阶ODE的初等解法：

  变量分离型

  齐次方程 $y' = g(\frac{y}{x})$, 令 $u(x) = \frac{y(x)}{x}$.

  一阶隐方程

  变量替换法、积分因子法、

  Bernoulli方程、Riccati方程

- 二阶线性ODE的常数变易法

- 可降阶的高阶ODE：

1)方程不显含未知函数x：$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0$

令$y=x^{(k)}$.

2)方程不显含自变量t：$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

令$y=x'$,视y为新未知函数,视x为新自变量.

3)m次齐次方程(m为正整数):$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

$x,x',\cdots,x^{(n)}$以m次齐次多项式的形式出现.

$$令u=u(t)=\frac{1}{x}x'$$

- 高阶常系数齐次线性ODE的特征法.

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \qquad (1)$$

特征方程: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \qquad (2)$

Thm. a)设λ是(2)的单重实根, 则$e^{\lambda t}$是(1)的实解.

b)设$\alpha \pm \mathrm{i}\beta$是(2)的一对单重复根, 则$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$是方程(1)的两个线性无关的实解.

c)设λ是(2)的$k(1<k\le n)$重实根, 则$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$是方程(1)的$k$个线性无关的实解.

d)设$\alpha \pm \mathrm{i}\beta$是(2)的一对$k(1<k\le n/2)$重复根, 则

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad te^{\alpha t}\cos\beta t,\quad \cdots\quad t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad te^{\alpha t}\sin\beta t,\quad \cdots\quad t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

是方程(1)的$2k$个线性无关的实解.□

- 高阶常系数非齐次线性ODE的待定系数法.

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \qquad (3)$$

特征方程: $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (2)$

Case1. $f(t) = p(t)e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$, $p(t)$为 m 次实多项式.则(3)有特解形如

$$x(t) = q(t)t^k e^{\lambda t}.$$

其中, k 为 λ 作为特征根的重数, $q(t)$为不高于 m 次的实系数多项式(系数待定).□

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \qquad (3)$$

特征方程: $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (2)$

Case2. $f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$A(t), B(t)$为实多项式, 最高次数为m.则(3)有解形如

$$x(t) = t^k [p(t)\cos\beta t + q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t},$$

其中, k 为 $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 作为特征根的重数, $p(t), q(t)$ 为不高于 m 次的实系数多项式(系数待定).

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \qquad (3)$$

Case3. $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$. 若$\varphi(t)$和$\psi(t)$分别为

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f_1(t),$$

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f_2(t)$$

的特解,则(3)有特解 $x(t)=\varphi(t)+\psi(t)$.

- Euler方程: $t^n \dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 t^{n-1} \dfrac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = f(t)$,

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$是(实)常数.

变$t > 0$ 时, 令$t = e^s$; $t < 0$ 时, 令$t = -e^s$. 则$s = \ln|t|$.

记$D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}, D^2 = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}, \cdots$, 则

$$t^k \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)x.$$

代入Euler方程, 得到常系数线性常微分方程.

请扫码反馈！ 谢谢！